数学名著译丛

微分几何基础

（第一卷）

〔美〕小林昭七　野水克己 著

谢孔彬　陈玉琢　谢云鹏 译





数学名著译丛

微分几何基础

（第一卷）

〔美〕小林昭七　野水克己　著

谢孔彬　陈玉琢　谢云鹏　译

科学出版社

北京

图字: 01-2009-7761

内 容 简 介

本书根据 S. Kobayashi and K. Nomizu 所著的 *Foundations of Defferential Geometry* (Wiley & Sons 公司出版的 Wiley 经典文库丛书(1996 版) (第一卷) 译出. 本卷首先给出了若干必要的预备知识, 主要包括微分流形、张量代数与张量分析、Lie 群和纤维丛等. 本卷的中心内容是联络理论, 不仅论述了一般联络理论, 还具体讲述了线性联络、仿射联络、黎曼联络等. 然后讲述了曲率形式和空间形式以及各种空间变换. 此外, 本卷还给出了 7 个附录和 11 个注释, 分别介绍了若干备查知识和历史背景材料.

本书可供数学、物理等专业的研究生及博士生作为教材或参考书, 特别是对有志于研究现代微分几何的青年学子更是极为合适的入门书, 也可供其他相关人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

微分几何基础(第一卷) / (美) 小林昭七, 野水克己著; 谢孔彬, 陈玉琢, 谢云鹏译. —北京: 科学出版社, 2010
(数学名著译丛)
ISBN 978-7-03-026473-2
I.微… II.①小… ②野… ③谢… ④陈… ⑤谢… III. 微分几何 IV. O186.1
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 012775 号

责任编辑: 陈玉琢 / 责任校对: 鲁 素
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

丽 源 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010 年 1 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)
2010 年 1 月第一次印刷 印张: 17 1/2
印数: 1—3 000 字数: 335 000

定价: 56.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

译者的话

由两位日裔数学家小林昭七 (加州大学伯克利分校教授) 和野水克己 (布朗大学教授) 合著的这部两卷集 *Foundations of Differential Geometry* 是一部久负盛名的现代微分几何的经典著作. 第一卷为基础部分, 第二卷是若干专题的深入研究. 本书是其第一卷的中译本. 该著作系统地总结了截至 20 世纪 60 年代末微分几何研究的主要成果, 反映了当时微分几何研究的前沿状况和发展趋势, 在第二卷末给出了长达 68 页的文献目录. 该书在微分几何发展史上产生了广泛而深刻的影响, 后来的许多微分几何专著和教科书几乎都把它作为主要参考书, 例如陈省身等著《微分几何讲义》等, 众多的学者把它作为系统研究现代微分几何的入门. 所以它实际上已成为现代微分几何发展史上的一个里程碑. 考虑到现代微分几何与古典微分几何之间, 无论从研究内容到研究方法都有很大的差异, 为了更好地反映本书的内容一度曾想把中译本书名定为"现代微分几何基础". 但是又考虑到该书是如此广泛地被引用, 若采用不同的书名, 可能会使读者产生误会造成不必要的麻烦, 因此为了方便读者也为了忠实原作与原书名保持一致, 最终仍然定名为《微分几何基础》. 现在将它奉献给读者, 希望它能为我国数学事业的发展, 特别是对微分几何的教学与研究发挥作用. 在这里特别对书中所涉及的数学家的姓名的翻译问题作一点说明. 对于西方数学家的姓名在书中都保留了原文名称, 因为许多现代数学家的名字尚无统一的习惯的译法, 而译法不一则容易引起混乱. 对于华人数学家的名字则尽量恢复汉字全名, 因为原文中往往只给出姓氏 (音译) 而名字缩略, 如 Chen, Wang 等, 而同姓的人太多, 不是很熟悉的人往往不知所指哪位, 为了方便读者尽可能恢复汉字全名. 对于日本数学家的名字, 本来按照日语和汉语的习惯应该是汉字通用, 而读音各按各的读法, 但是因为本书不是从日文直接翻译过来, 而是从英文翻译过来, 因而日本人名也只有英文音译没有汉字, 所以上述原则无法使用. 若要从英文音译恢复汉字则相当困难, 因为日本姓名使用的汉字中同音字太多. 有的多达几十种, 而人名用字都是特定的, 绝不可乱用同音字代替. 由于译者水平和手头资料所限, 难以准确恢复原书人名中的汉字. 因此除本书的作者之外, 其他日本数学家的名字均保留英文音译名. 不过好在许多日本数学家的英文译名是非常流行的.

本书在翻译过程中得到山东理工大学各级领导的关心和鼓励, 特别是得到吕传毅副校长的大力支持. 在此特别向所有关心支持帮助过我们的朋友表示衷心地

感谢!

由于受译者中英文水平和对书中内容理解程度所限, 译文中表述不当乃至错误之处在所难免, 恳请广大读者和业内同仁批评指正!

译　者

2009 年 10 月

前　言

微分几何作为数学的一个分支已有悠久的历史, 然而它在现代数学领域中的严格基础却是相对较晚才形成的. 我们写的这部两卷集 *Foundations of Differential Geometry* 的第一卷, 就是要为微分几何提供一个系统的导引, 同时它也可以作为参考书使用.

我们所关心的主要事情是使本书成为自封的并且对基础方面的所有标准结果都给出完整的证明. 我们希望能够通过下列编排来达到这个目的. 在第一章给出微分流形、Lie 群及纤维丛的一个概论. 不熟悉这些内容的读者可以通过在参考文献中所列出的 Chevalley、Montgomery-Zippin、Pontrjagin 及 Steenrod 的书来学习这些科目. 这些著作也是我们在第一章的标准参考书. 我们还写进了张量代数和张量场的简要内容, 其主题是张量场代数的求导问题. 在附录中给出了一些在正文中所需要的来自拓扑学、Lie 群论及其他方面的结果. 有了这些准备, 本书是自封的.

第二章包括 Ehresmann 联络理论及其最新进展. 本章的结果被用于第三章的线性联络和仿射联络也被应用于第四章的 Riemann 联络, 其中关于法坐标、凸邻域、距离、完备性及和乐群的许多基本结果, 包括 Riemann 流形的 de Rham 分解定理都给出了完整的证明.

第五章介绍 Riemann 流形的截曲率和常曲率空间. 关于涉及到的截曲率的 Riemann 流形的若干性质的更完备论述要依赖于变分运算, 我们将在第二卷中论述. 本章将详细讨论平坦仿射联络和 Riemann 联络.

第六章首先讨论保持给定的线性联络或保持 Riemann 度量的变换和无穷小变换, 其中包括关于 Ricci 张量、和乐等距和无穷小等距的各种结果. 然后论述局部变换的扩张以及仿射联络与 Riemann 联络的等价问题. 本章的结果与齐性空间 (特别是对称空间) 的微分几何密切相关. 我们计划把齐性空间和对称空间的微分几何安排在第二卷中.

在所有各章中, 我们都试图让读者通晓在微分几何中普遍使用的各种计算方法. 这些方法是: ① 用指标表示的经典张量运算; ② E. Cartan 的外微分运算; ③ 协变微分形 $\nabla_X Y$, 这是三者当中最新的. 我们还阐述了利用适当的丛或直接在底空间上进行的方法, 并认为这是适当的.

注释中包含了若干历史事实和与本卷主要内容相关的一些补充结果. 卷末的参

考文献仅包括贯穿本书所引用的那些书籍和论文.

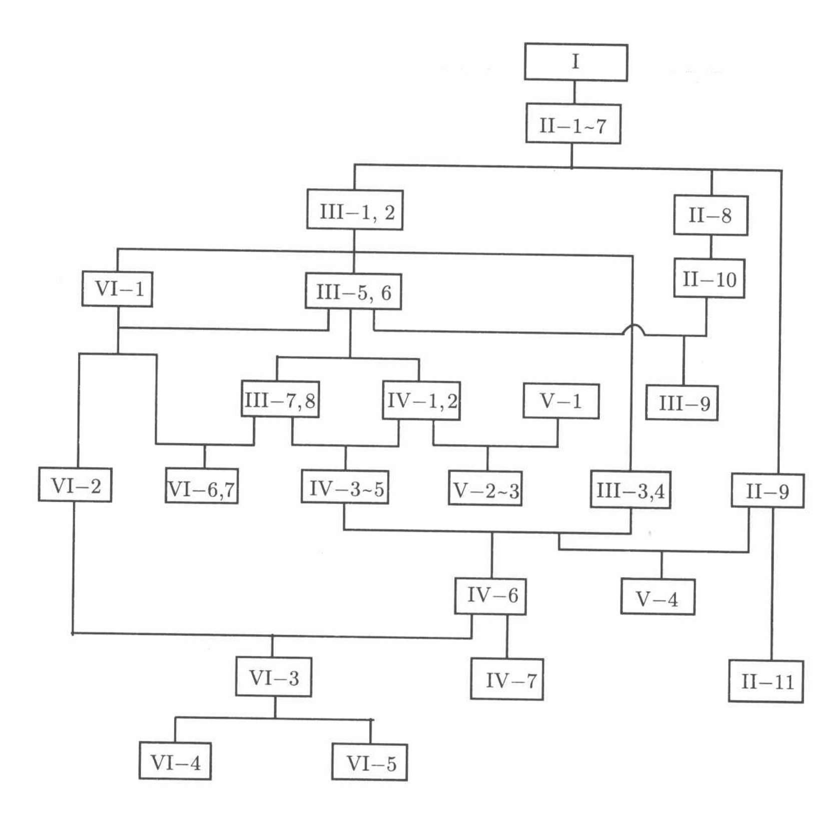
对于定理、命题和推论按节进行编号. 例如在每一章, 比方说在第二章中, 定理 3.1 在第 3 节. 在同一章的其他地方提到时将只说定理 3.1. 若在后面的章节中引用时, 则说第二章定理 3.1.

原来我们计划将这部书写成一卷, 它除包含本卷的内容之外还包括下列论题: 子流形、弧长积分的变分、复流形和 Kähler 流形的微分几何、齐性空间的微分几何、对称空间、示性类等. 但出于时间和篇幅的考虑适合将它分为两卷. 因而就将上面提到的那些论题放到第二卷中.

在本前言即将结束之际, 我们对 L. Bers 教授邀请我们承担这个课题表示感谢; 对 Intersience 出版公司 John Wiley & Sons 分公司的耐心而友好的合作表示感谢; 十分感激 A. J. Lohwater 博士、H. Ozeki 博士、A. Howard 和 E. Ruh 先生的友好帮助, 正是由于他们的帮助使得本书在内容和表述上都有许多改进. 我们还要感谢国际科学基金会的资助支持了包含在本书中的部分工作.

小林昭七
野水克己

各章节之间的依赖关系



例外

第二章：定理 11.8 需要第二章 2.10 节.

第三章：命题 6.2 需要第三章 3.4 节.

第四章：推论 2.4 需要第三章命题 7.4.

定理 4.1, (4) 需要第三章 3.4 节和第三章命题 6.2.

第五章：命题 2.4 需要第三章 3.7 节.

第六章：定理 3.3 需要第五章 5.2 节; 推论 5.6 需要第五章例 4.1;

推论 6.4 需要第四章命题 2.6; 定理 7.10 需要第五章 5.2 节.

目　录

第一章　微分流形

1.1　微分流形

拓扑空间 S 上的伪变换群是一个满足下列公理的变换的集合 Γ:

(1) 每一个 $f \in \Gamma$ 是从 S 的一个开集 (称为 f 的定义域) 到 S 的另一个开集 (称为 f 的值域) 上的同胚;

(2) 如果 $f \in \Gamma$, 那么 f 在其定义域的任意开子集上的限制也在 Γ 中;

(3) 令 $U = \bigcup_i U_i$, 其中每个 U_i 是 S 的一个开集. 如果 f 在每个 U_i 上的限制在 Γ 中, 那么从 U 到 S 的开集上的同胚 f 居于 Γ;

(4) 对于 S 的每个开集 U, U 上的恒等变换在 Γ 中;

(5) 如果 $f \in \Gamma$, 那么 $f^{-1} \in \Gamma$;

(6) 如果 $f \in \Gamma$ 是从 U 到 V 上的同胚, $f' \in \Gamma$ 是从 U' 到 V' 上的同胚, 并且 $V \cap U'$ 是非空的, 那么从 $f^{-1}(V \cap U')$ 到 $f'(V \cap U')$ 上的同胚 $f' \circ f$ 在 Γ 中.

下面给出几个在本书中要用到的伪群的例子. 令 $\mathbf{R}^n$ 是由实数 n 元组 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 构成的空间并且带有通常的拓扑. 若从 $\mathbf{R}^n$ 的开集到 $\mathbf{R}^m$ 中的映射 f 是 r 次可微的, 则我们称它是 C^r 的 $(r = 1, 2, \cdots, \infty)$. 以 C^0 表示 f 是连续的, 用 C^ω 表示 f 是实解析的. $\mathbf{R}^n$ 上的 C^r 伪变换群 $\Gamma^r(\mathbf{R}^n)$ 是从 $\mathbf{R}^n$ 的开集到 $\mathbf{R}^n$ 的开集上的同胚 f 的集合并且使得 f 和 f^{-1} 都是 C^r 的. 显然 $\Gamma^r(\mathbf{R}^n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个伪变换群. 如果 $r < s$, 那么 $\Gamma^s(\mathbf{R}^n)$ 是 $\Gamma^r(\mathbf{R}^n)$ 的子群. 若只考虑那些 Jacobi 行列式处处为正的 $f \in \Gamma^r(\mathbf{R}^n)$, 则得到 $\Gamma^r(\mathbf{R}^n)$ 的一个伪子群. 将这个伪子群记作 $\Gamma_0^r(\mathbf{R}^n)$, 并称之为 $\mathbf{R}^n$ 的保持定向的 C^r 伪变换群. 令 $\mathbf{C}^n$ 是带通常拓扑的复 n 元组构成的空间. $\mathbf{C}^n$ 上的全纯 (即复解析) 伪变换群可类似地定义并且记之为 $\Gamma(\mathbf{C}^n)$. 我们将 $\mathbf{C}^n$ 与 $\mathbf{R}^{2n}$ 等同, 必要时通过把 $(z^1, \cdots, z^n) \in \mathbf{C}^n$ 映射到 $(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n) \in \mathbf{R}^{2n}$ 来实现, 其中 $z^j = x^j + iy^j$. 在这个等同下, 对于任何 r, $\Gamma(\mathbf{C}^n)$ 都是 $\Gamma_0^r(\mathbf{R}^{2n})$ 的伪子群.

拓扑空间 M 的一个与伪群相容的卡集是一族称为坐标卡的二元组 (U_i, φ_i) 并且使得

(a) 每个 U_i 都是 M 的开集而且 $\bigcup_i U_i = M$;

(b) 每个 φ_i 是从 U_i 到 S 的一个开集上的同胚;

(c) 当 $U_i \cap U_j$ 非空时, 从 $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ 到 $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ 上的映射 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ 是 Γ

的一个元.

M 的一个与 Γ 相容的完备卡集是 M 的与 Γ 相容的卡集而且它不包含在 M 的与 Γ 相容的任何其他卡集之中. M 的每一个与 Γ 相容的卡集均包含在 M 的唯一一个与 Γ 相容的完备卡集中. 事实上, 给定 M 的一个与 Γ 相容的卡集 $A = \{(U_i, \varphi_i)\}$, 令 $\tilde{A}$ 是所有这种二元组 (U, φ) 的集族, 其中 φ 是从 M 的开集 U 到 S 的一个开集上的同胚并且当 $U \cap U_i$ 非空时,

$$\varphi_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U_i) \to \varphi_i(U \cap U_i)$$

是 Γ 的一个元, 那么 $\tilde{A}$ 是包含 A 的完备卡集.

如果 Γ' 是 Γ 的一个伪子群, 那么 M 的与 Γ' 相容的卡集也是与 Γ 相容的.

一个 C^r 微分流形是一个带有与 $\Gamma(\mathbf{R}^n)$ 相容的固定完备卡集的 Hausdorff 空间, 整数 n 称为流形的维数. Hausdorff 空间的任何一个与 $\Gamma^r(\mathbf{R}^n)$ 相容的卡集均可扩充成一个完备卡集以定义一个可微结构. 因为对于 $r < s$, $\Gamma^r(\mathbf{R}^n) \supset \Gamma^s(\mathbf{R}^n)$, 所以一个 C^s 可微结构唯一地决定一个 C^r 可微结构. C^ω 可微流形也称为实解析流形 (贯穿全书我们将更多地考虑 C^∞ 可微流形. 今后若提到"微分流形"或简称"流形"时总是指 C^∞ 微分流形). 一个 n 维复 (解析) 流形是一个 Hausdorff 空间并且带有一个固定的与 $\Gamma(\mathbf{C}^n)$ 相容的完备卡集. 一个 C^r 定向微分流形是一个带有固定的与 $\Gamma_0^r(\mathbf{R}^n)$ 相容的完备卡集的 Hausdorff 空间. 一个 C^r 定向微分结构唯一地产生一个 C^r 可微结构. 但并不是每一个 C^r 可微结构都是这样被定向的, 如果它是从一个定向结构而得到的, 则称之为可定向的. 若一个可定向 C^r 流形是连通的, 则它恰好容许有两种定向. 我们将这一事实的证明留给读者, 而只说明如何将一个定向流形反向定向. 若一族坐标卡 (U_i, φ_i) 确定一个定向流形, 那么卡族 (U_i, φ_i) 确定相反定向的流形, 其中 ψ_i 是 φ_i 与 $\mathbf{R}^n$ 的变换 $(x^1, x^2, \cdots, x^n) \to (-x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 的复合. 由于 $\Gamma(\mathbf{C}^n) \subset \Gamma_0^r(\mathbf{R}^{2n})$, 所以每个复流形都可作为 C^r 流形而被定向.

对于所考虑的任何结构 (例如 C^r 可微结构) 而言, 一个可容许的坐标卡是一个属于定义该结构的固定完备卡集的坐标卡. 今后, "坐标卡"一词将专指可容许的坐标卡. 给定一个 n 维 C^r 流形 M 的容许坐标卡 (U_i, φ_i), 在 U_i 上定义的函数系 $x^1 \circ \varphi_i, \cdots, x^n \circ \varphi_i$ 称为 U_i 上的局部坐标系, 而且称 U_i 是一个坐标邻域. 对于 M 的每一点 p, 可以找到一个坐标卡 (U_i, φ_i) 使得 $\varphi_i(p)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的原点而且 φ_i 是从 U_i 到由 $|x'| < a, \cdots, |x^n| < a$($a$ 为某个正数) 界定的 $\mathbf{R}^n$ 的开集上的同胚. 因而 U_i 称为 p 点的方形邻域.

自然 $\mathbf{R}^n$ 对于任何 r 都是 C^r 定向流形, 坐标卡是由 $\Gamma_0^r(\mathbf{R}^n)$ 的元素 f 和 f 的定义域构成的. 类似地, $\mathbf{C}^n$ 是一个复流形. C^r 流形 M 的任何开子集 N 自然也是一个 C^r 流形, N 的坐标卡由 $(U_i \cap N, \psi_i)$ 给出, 这里 (U_i, φ_i) 是 M 的坐标卡, 而 ψ_i 是 φ_i 在 $U_i \cap N$ 上的限制. 类似地, 对复流形的情况也是如此.

给定两个 C^r 流形 M 和 M' 以及映射 $f: M \to M'$, 若对 M 的每个坐标卡 (U_i, φ_i) 和 M' 的每个坐标卡 (V_j, ψ_j) 都有 $f(U_i) \subset V_j$ 而且从 $\varphi_i(U_i)$ 到 $\psi_j(V_j)$ 的映射 $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ 是 C^k 可微的, 则称 f 是 $C^k(k \leqslant r)$ 可微的. 如果 $u^1, \cdots, u^n$ 是 U_i 上的一个局部坐标系而 $v^1, \cdots, v^m$ 是 V_j 上的一个局部坐标系, 那么 f 可以用一族 C^k 可微函数表示为:

$$v^1 = f^1(u^1, \cdots, u^n), \cdots, v^m = f^m(u^1, \cdots, u^n).$$

以后凡是提到"可微映射"或简称"映射", 总是指 C^∞ 映射. M 上的 C^k 可微函数是 M 到 $\mathbf{R}$ 中的 C^k 映射. 全纯 (或复解析) 映射或函数的情况是类似的.

M 中的一条 C^k 可微曲线是指从 $\mathbf{R}$ 的一个闭区间 $[a, b]$ 到 M 中的一个 C^k 可微映射, 即从包含 $[a, b]$ 的开区间到 M 中的 C^k 映射的限制. 现在来定义在 M 的一点 p 处的切向量 (或简称向量). 令 $\mathfrak{F}(p)$ 为在 p 点的邻域中定义的 C^1 可微函数构成的代数. 令 $x(t)$ 是一条 C^1 曲线 $(a \leqslant t \leqslant b)$ 并且使得 $x(t_0) = p$. 曲线 $x(t)$ 在 p 点的切向量是由

$$Xf = \left(\frac{df(x(t))}{dt}\right)_{t_0}$$

定义的一个映射 $X: \mathfrak{F}(p) \to \mathbf{R}$. 换句话说, Xf 是 f 沿曲线 $x(t)$ 在 $t = t_0$ 点的方向上的导数. 向量 X 满足下列条件:

(1) X 是从 $\mathfrak{F}(p)$ 到 $\mathbf{R}$ 中的线性映射;

(2) $X(fg) = (Xf)g(p) + f(p)(X_g), \quad f, g \in \mathfrak{F}(p)$.

满足上述两个条件的从 $\mathfrak{F}(p)$ 到 $\mathbf{R}$ 中的映射的集合构成实向量空间. 现在说明 p 点所有向量的集合成为一个 n 维子向量空间, 其中 n 是 M 的维数. 令 $u^1, \cdots, u^n$ 是 p 点的邻域 U 上的一个局部坐标系. 对于每一个 j, $\left(\dfrac{\partial}{\partial u}\right)_p$ 是一个满足上面的条件 (1) 和 (2) 的从 $\mathfrak{F}(p)$ 到 $\mathbf{R}$ 中的映射. 我们将说明 p 点处所有向量的集合是一个以 $\left(\dfrac{\partial}{\partial u^j}\right)_p, \cdots, \left(\dfrac{\partial}{\partial u^n}\right)_p$ 为基的向量空间. 给定适合 $p = x(t_0)$ 的任何曲线 $x(t)$, 令 $u^j = x^j(t)$ $(j = 1, \cdots, n)$ 是曲线在局部坐标系 $u^1, \cdots, u^n$ 中的方程. 那么

$$(df(x(t))/dt)_{t_0} = \sum_j (\partial f/\partial u^j)_p \cdot (dx^j(t)/dt)^*_{t_0},$$

这说明 p 点的每一个向量都是 $(\partial/\partial u^1)_p, \cdots, (\partial/\partial u^n)_p$ 的线性组合. 反过来, 给定一个线性组合 $\Sigma \xi^j (\partial/\partial u^j)_p$, 考虑由

$$u^j = u^j(p) + \xi^j t, \quad j = 1, \cdots, n$$

* 对于求和符号参看基本符号一览表.

定义的曲线. 那么这条曲线在 $t=0$ 点的切向量是 $\sum \xi^j(\partial/\partial u^j)_p$. 为证明 $(\partial/\partial u^1)_p$, $\cdots$, $(\partial/\partial u^n)_p$ 线性无关, 假设 $\Sigma\xi^j(\partial/\partial u^j)_p=0$, 那么

$$0=\sum \xi^j(\partial u^k/\partial u^j)_p=\xi^k,\quad k=1,\cdots,n.$$

这就证明了我们的断言. 将 p 点处切向量的集合记为 $T_p(M)$ 或 T_p, 并且称之为 M 在 p 点的切空间; 把 n 元数组 $\xi^1,\cdots,\xi^n$ 称作向量 $\sum \xi^j(\partial/\partial u^j)_p$ 关于局部坐标系 $u^1,\cdots,u^n$ 的分量.

评注　我们知道, 若 M 是一个 C^∞ 流形, 那么 $T_p(M)$ 与满足上面的条件 (1) 和 (2) 的 X: $\mathfrak{F}(p)\to\mathbf{R}$ 组成的空间一致, 其中 $\mathfrak{F}(p)$ 表示在 p 点附近定义的所有 C^∞ 函数组成的代数. 今后我们将主要考虑 C^∞ 流形和 C^∞ 映射.

流形 M 上的一个向量场 X 是对 M 的每一点指定一个向量 X_p 的一种指派. 若 f 是 M 上的可微函数, 那么 Xf 是 M 上由 $(Xf)(p)=X_pf$ 定义的函数. 一个向量场 X, 若对于每个可微函数 f, Xf 都是可微的, 则称向量场 X 是可微的. 利用局部坐标系 $u^1,\cdots,u^n$, 向量场 X 可表示为 $X=\sum \xi^j(\partial/\partial u^j)$, 其中 ξ^j 是在坐标邻域内定义的函数, 称为 X 关于 $u^1,\cdots,u^n$ 的分量. X 是可微的当且仅当它的分量 ξ^j 都可微的.

令 $\mathfrak{X}(M)$ 是 M 上所有可微向量场的集合. 它在自然加法和数乘运算之下成为一个实向量空间. 如果 X 和 Y 都在 $\mathfrak{X}(M)$ 中, 那么把括号运算 $[X,Y]$ 定义为从 M 上的函数环到其自身的映射

$$[X,Y]f=X(Yf)-Y(Xf).$$

我们将证明 $[X,Y]$ 是一个向量场. 利用局部坐标系 $u^1,\cdots,u^n$ 写成

$$X=\sum \xi^j(\partial/\partial u^i),\quad Y=\sum \eta^j(\partial/\partial u^i),$$

那么

$$[X,Y]f=\sum_{j,k}\left(\xi^k\frac{\partial\eta^j}{\partial u^k}-\eta^k\frac{\partial\xi^j}{\partial u^k}\right)\frac{\partial f}{\partial u^j}.$$

这意味着 $[X,Y]$ 是一个向量场, 并且它关于 $u^1,\cdots,u^n$ 的分量由 $\sum_k\left(\xi^k\frac{\partial\eta^j}{\partial u^k}-\eta^k\frac{\partial\xi^j}{\partial u^k}\right)(j=1,\cdots,n)$ 给出. $\mathfrak{X}(M)$ 关于这个括号运算成为实数域上的一个 (无穷维)Lie 代数. 特别有 Jacobi 恒等式:

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0,\quad X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M).$$

还可以将 $\mathfrak{X}(M)$ 看作由 M 上的可微函数组成的代数 $\mathfrak{F}(M)$ 上的模如下: 若 f 是 M 上的一个函数, X 是 M 上的一个向量场, 则 fX 是 M 上由 $(fX)_p = f(p)X_p (p \in M)$ 定义的向量场. 那么

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X, \quad f, g \in \mathfrak{F}(M), X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

对于 M 的一点 p, 我们把切空间 $T_p(M)$ 的对偶空间 $T_p^*(M)$ 称为 p 点的余切空间, 把在每一点 p 指定一个余切向量的指派称为 1 形式 (1 次微分形式). 对于 M 上的每个函数 f, 将 f 在 p 点的全微分 $(df)_p$ 定义为

$$\langle (df)_p, X \rangle = Xf, \quad X \in T_p(M),$$

其中, $\langle , \rangle$ 表示作为 $T_p(M)$ 上的线性泛函第一个元素作用在第二个元素上的值. 如果 $u^1, \cdots, u^n$ 是 p 的邻域上的局部坐标系, 那么全体微分 $(du^1)_p, \cdots, (du^n)_p$ 构成 $T_p^*(M)$ 的一个基. 实际上, 它们构成 $T_p(M)$ 的基 $(\partial/\partial u^1)_p, \cdots, (\partial/\partial u^n)_p$ 的对偶基. 在 p 的邻域中, 每个 1 形式 ω 能够唯一地写成

$$\omega = \sum_j f_j du^j,$$

其中各 f_j 是在 p 点的邻域中定义的函数, 称为 ω 关于 $u^1, \cdots, u^n$ 的分量. 如果各个 f_j 都是可微的 (此条件依赖于局部坐标系的选取), 那么 1 形式 ω 就称作可微的. 我们将只考虑可微的 1 形式.

一个 1 形式 ω 也可以定义为 $\mathfrak{F}(M)$ 模 $\mathfrak{X}(M)$ 到 $\mathfrak{F}(M)$ 中的 $\mathfrak{F}(M)$ 线性映射. 两种定义通过下式相关 (参看命题 3.1):

$$(\omega(X))_p = \langle \omega_p, X_p \rangle, \quad X \in \mathfrak{X}(M), p \in M.$$

令 $\wedge T_p^*(M)$ 是 $T_p^*(M)$ 上的外代数. 一个 r 形式 ω 是对 M 的每一点指定 $\wedge T_p^*(M)$ 中的一个 r 次元素的一种指派. 利用局部坐标系 $u^1, \cdots, u^n$ 可将 ω 唯一地表示成

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} f_{i_1 \cdots i_r} du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r}.$$

如果各分量 $f_{i_1 \cdots i_r}$ 都是可微的, 则称 r 形式 ω 是可微的. 今后凡提到"r 形式"都是指可微的 r 形式. 也可以将 r 形式 ω 定义为 $\mathfrak{F}(M)$ 上的从 $\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)$($r$ 次乘积) 到 $\mathfrak{F}(M)$ 中的反对称 r 线性映射. 两种定义有如下关系: 如果 $\omega_1, \cdots, \omega_r$ 是 1 形式而 $X_1, \cdots, X_r$ 是向量场, 那么 $(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r)(X_1, \cdots, X_r)$ 是 r 阶矩阵 $(\omega_j(X_k))_{j,k=1,\cdots,r}$ 的行列式的 $\dfrac{1}{r!}$ 倍.

对于每个 $r=0,1,\cdots,n$, 用 $\mathfrak{D}^r=\mathfrak{D}^r(M)$ 表示 M 上 (可微)r 形式的全体. 那么 $\mathfrak{D}^0(M)=\mathfrak{F}(M)$. 每个 $\mathfrak{D}^r(M)$ 都是一个实向量空间并且也可以看作一个 $\mathfrak{F}(M)$ 模: 对于 $f\in\mathfrak{F}(M)$ 和 $\omega\in\mathfrak{D}^r(M)$, $f\omega$ 是一个由 $(f\omega)_p=f(p)\omega_p(p\in M)$ 定义的 r 形式. 置 $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}(M)=\sum_{r=0}^{n}\mathfrak{D}^r(M)$. $\mathfrak{D}(M)$ 关于外积运算形成一个实数域上的代数. 可将外微分运算 d 的性质描述如下:

(1) d 是从 $\mathfrak{D}(M)$ 到其自身的一个 $\mathbf{R}$ 线性映射且使得 $d(\mathfrak{D}^r)\subset\mathfrak{D}^{r+1}$;

(2) 对于函数 $f\in\mathfrak{D}^0$ 而言, df 就是全微分;

(3) 若 $\omega\in\mathfrak{D}^r$ 且 $\pi\in\mathfrak{D}^s$, 那么

$$d(\omega\wedge\pi)=d\omega\wedge\pi+(-1)^r\omega\wedge d\pi;$$

(4) $d^2=0$.

用局部坐标系表示则有, 若 $\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_r}f_{i_1\cdots i_r}du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r}$, 那么 $d\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_r}df_{i_1\cdots i_r}\wedge du^1\wedge\cdots\wedge du^{i_r}$.

以后还需要考虑取值于任意向量空间的微分形式. 令 V 是一个 m 维实向量空间. M 上的一个 V 值 r 形式是这样一种指派, 它对每一点 $p\in M$ 指定一个从 $T_p(M)\times\cdots\times T_p(M)$($r$ 次乘积) 到 V 中的反对称 r 线性映射. 若取定 V 的一个基 $e_1,\cdots,e_m$, 则可将 ω 唯一地写成 $\omega=\sum_{j=1}^{m}\omega^j\cdot e_j$, 其中 ω^j 是 M 上的通常 r 形式. 由定义, 若各 ω^j 都是可微的, 则 ω 是可微的. 将外导数 $d\omega$ 定义为 $\sum_{j=1}^{m}d\omega^j\cdot e_j$, 它是一个 V 值的 $(r+1)$ 形式.

给定从流形 M 到另一个流形 M' 的映射 f, 那么 f 在 p 点的微分是如下定义的从 $T_p(M)$ 到 $T_{f(p)}(M')$ 中的一个线性映射 f^*. 对于每个 $X\in T_p(M)$, 在 M 中选取一条曲线 $x(t)$ 使得 X 是 $x(t)$ 在 $p=x(t_0)$ 点的一个切向量, 那么 $f^*(X)$ 是曲线 $f(x(t))$ 在 $f(p)=f(x(t_0))$ 点的切向量. 由此立即得知, 若 g 是 $f(p)$ 的邻域中的可微函数, 那么 $(f^*(X))g=X(g\circ f)$. 当需要指明 p 点时则写成 $(f^*)_p$. 在不至于引起混淆时, 可将 f^* 简写成 f. $(f^*)_p$ 的转置是一个从 $T^*_{f(p)}(M')$ 到 $T^*_p(M)$ 的线性映射. 对 M' 上的任何一个 r 形式 ω', 均可通过

$$(f^*\omega')(X_1,\cdots,X_r)=\omega'(f^*X_1,\cdots,f^*X_r),\quad X_1,\cdots,X_r\in T_p(M)$$

定义 M 上的一个 r 形式 $f^*\omega'$. 外微分 d 与 f^* 可交换: $d(f^*\omega')=f^*(d\omega')$.

对于从 M 到 M' 的映射 f, 如果 $f^*(T_p(M))$ 的维数是 r, 则称 f 在点 $p\in M$ 的秩是 r. 如果 f 在 p 点的秩为 $n=\dim M$, 那么 $(f^*)_p$ 是内射并且 $\dim M\leqslant\dim M'$;

如果 f 在 p 点的秩为 $n' = \dim M'$, 那么 $(f^*)_p$ 是满射并且 $\dim M \geqslant \dim M'$. 由隐函数定理可得

命题 1.1 令 f 是从 M 到 M' 的映射且 p 是 M 的一点.

(1) 如果 $(f^*)_p$ 是内射, 则存在 p 点的邻域 U 上的局部坐标系 $u^1, \cdots, u^n$ 和 $f(p)$ 的邻域上的局部坐标系 $v^1, \cdots, v^{n'}$ 使得

$$v^i(f(q)) = u^i(q), \quad q \in U, \quad i = 1, \cdots, n.$$

特别地, f 是从 U 到 $f(v)$ 的同胚.

(2) 如果 $(f^*)_p$ 是满射, 那么存在 p 点的邻域 U 上的局部坐标系 $u^1, \cdots, u^n$ 和 $f(p)$ 点的邻域上的局部坐标系 $v^1, \cdots, v^{n'}$ 使得

$$v^i(f(q)) = u^i(q), \quad q \in U, \quad i = 1, \cdots, n'.$$

特别映射 $f: U \to M'$ 是开的.

(3) 如果 $(f^*)_p$ 是从 $T_p(M)$ 到 $T_{f(p)}(M)$ 的线性同构, 那么 f 定义一个从 p 点的邻域 U 到 $f(p)$ 点的一个邻域 V 上的同胚而且它的逆 f^{-1}: $V \to U$ 也是可微的.

此命题的证明参看 Chevalley[1, pp. 79-80].

如果从 M 到 M' 的映射 f 对 M 的每一点 p 均使 $(f^*)_p$ 为内射, 则称 f 为浸入. 此时可称 M 由 f 浸入到 M' 中, 或者称 M 是 M' 的浸入子流形. 当浸入 f 为内射时, 则称 f 是 M 到 M' 中的嵌入, 称 M(或者象 $f(M)$) 是 M' 的嵌入子流形 (或简称子流形). 一个子流形可以是也可以不是 M' 的闭子集. 子流形的拓扑一般细于从 M' 诱导的相对拓扑. 流形 M' 的一个开子集 M 自然可以看作 M' 的子流形, 并且称为 M' 的开子流形.

例 1.1 令 f 是在流形 M' 上定义的函数. 令 M 是使得 $f(p) = 0$ 的点 $p \in M'$ 的集合. 如果 $(df)_p \neq 0$ 在 M 的每一点 p 成立, 那么就有可能在 M 上引入一个流形结构使得 M 成为 M' 的一个闭子流形并且称之为由方程 $f = 0$ 定义的超曲面. 更一般地, 令 M 是定义在 M' 上的函数 $f_1, \cdots, f_r$ 的公共零点的集合. 如果由 $(df_1)_p, \cdots, (df_r)_p$ 张成的 $T_p^*(M')$ 的子空间的维数 (比如说是 k) 于 M 在 M' 中的一个邻域上为常数, 那么 M 是 M' 的一个 $(\dim M' - k)$ 维闭子流形.

从一个流形 M 到另一个流形 M' 的微分同胚是一个使得 φ 和 φ^{-1} 均可微的同胚 φ. M 到其自身的微分同胚称为 M 上的可微变换 (简称变换). M 上的一个变换 φ 诱导 M 上的微分形式构成的代数 $\mathfrak{D}(M)$ 的一个自同构 φ^*, 特别地, 诱导 M 上的函数组成的代数 $\mathfrak{F}(M)$ 的一个自同构:

$$(\varphi^* f)(p) = f(\varphi(p)), \quad f \in \mathfrak{F}(M), \quad p \in M.$$

它还通过

$$(\varphi_* X)_p = (\varphi_*)_q(X_q), \quad 其中\ \varphi(q) = p, \quad X \in \mathfrak{X}(M)$$

诱导向量场的 Lie 代数 $\mathfrak{X}(M)$ 的一个自同构 φ_*. 它们是通过

$$\varphi^*((\varphi_* X)f) = X(\varphi^* f), \quad X \in \mathfrak{X}(M), \quad f \in \mathfrak{F}(M)$$

相关的.

虽然从 M 到 M' 的任何映射 φ 都将 M' 上的微分形式 ω' 映射成 M 上的微分形式 $\varphi^*(\omega')$, 但是 φ 一般不能将 M 上的向量场映射成 M' 上的向量场. 如果 $(\varphi^*)_p X_p = X'_{\varphi(p)}$ 对所有 $p \in M$ 成立, 则称 M 上的向量场 X 与 M' 上的向量场 X' 是 φ 相关的. 若 X 和 Y 分别 φ 相关于 X' 和 Y', 那么 $[X, Y]\varphi$ 相关于 $[X', Y']$.

流形 M 上的一个 r 维分布 S 是对 M 的每一点 p 指定 $T_p(M)$ 的一个 r 维子空间 S_p 的一种指派. 如果每一点 p 都有一个邻域 U 和 U 上的 r 个向量场, 比方说是 $X_1, \cdots, X_r$, 它们在每一点 $q \in U$ 均构成 S_q 的一个基, 则称这个分布是可微的, 并把 $X_1, \cdots, X_r$ 称为分布 S 在 U 中的局部基. 若 $X_p \in S_p$ 对所有 $p \in M$ 成立, 则称向量场 X 属于 S. 最后, 若当两个向量场 X 和 Y 属于 S 时就有 $[X, Y]$ 属于 S, 则称分布 S 为对合的. 今后凡提到"分布"将总是指可微分布.

对于 M 的一个连通子流形 N, 如果 $f^*(T_p(M)) = S_p$ 对所有 $p \in N$ 成立, 其中 f 是 N 到 M 中的嵌入, 那么就将 N 称为分布 S 的积分流形. 如果没有 S 的其他积分流形包含 N, 则称 N 为 S 的极大积分流形. 经典的 Frobenius 定理可以表述如下.

命题 1.2　令 S 是流形 M 的一个对合分布. 过每一点 $p \in M$ 都有 S 的唯一一个极大积分流形 $N(p)$ 通过. 经过 p 的任何积分流形均为 $N(p)$ 的开子流形.

证明见 Chevalley[1, p.94]. 这个命题还可以叙述成

命题 1.3　令 S 是流形 M 上的一个对合分布, 令 W 是 M 的一个子流形, 其连通分支都是 S 的积分流形. 令 f 是流形 N 到 M 中的可微映射且使得 $f(N) \subset W$. 若 W 满足第二可数公理, 那么 f 作为 N 到 W 中的映射是可微的.

其证明参看 Chevalley[1, p.95, 命题 1]. 可以始终用可微性代替那里的解析性并且注意到 W 不必是连通的, 因为 f 的可微性是局部性质.

现在我们来定义分别是 m 维和 n 维的两个流形 M 和 N 的积. 如果 M 由卡集 $A = \{(V_i, \varphi_i)\}$ 定义而 N 由卡集 $B = \{(V_j, \psi_j)\}$ 定义, 那么拓扑空间 $M \times N$ 上的自然可微结构是由卡集 $\{(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)\}$ 定义的, 其中 $\varphi_i \times \psi_j$: $U_i \times V_j \to \mathbf{R}^{m+n} = \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ 是以自然方式定义的. 请注意到这个卡集不是完备的, 即使 A 和 B 是完备的. 对于 $M \times N$ 的每一点 (p, q), 切空间 $T_{(p,q)}(M \times N)$ 能以自然方式等同于 $T_p(M) + T_q(N)$. 即对于 $X \in T_p(M)$ 和 $Y \in T_q(N)$, 选择曲线 $x(t)$ 和 $y(t)$ 使得 X 在

点 $p=x(t_0)$ 切于 $x(t)$ 并且 Y 在点 $q=y(t_0)$ 切于 $y(t)$, 那么 $(X,Y)\in T_p(M)+T_q(N)$ 等同于向量 $Z\in T_{(p,q)}(M\times N)$, 而此向量 Z 在 $(p,q)=(x(t_0),y(t_0))$ 点切于曲线 $z(t)=(x(t),y(t))$. 令 $\bar{X}\in T_{(p,q)}(M\times N)$ 是 $M\times N$ 中的曲线 $(x(t),q)$ 在 (p,q) 点的切向量. 类似地令 $\bar{Y}\in T_{(p,q)}(M\times N)$ 是 $M\times N$ 中的曲线 $(p,y(t))$ 在 (p,q) 点的切向量. 换句话说, $\bar{X}$ 是 X 在把 $p'\in M$ 映为 (p',q) 的映射 $M\to M\times N$ 下的象, 而 $\bar{Y}$ 是 Y 在把 $q'\in N$ 映为 (p,q') 的映射 $N\to M\times N$ 之下的象, 那么 $Z=\bar{X}+\bar{Y}$, 因为对 $M\times N$ 上的任何函数 f, 由链规则, $Zf=(df(x(t),y(t))/dt)_{t=t_0}$ 等于

$$(df(x(t),y(t_0)/dt)_{t=t_0}+(df(x(t_0),y(t))/dt)_{t=t_0}=\bar{X}f+\bar{Y}f.$$

更一般地有

命题 1.4(Leibniz 公式) 令 φ 是从积流形 $M\times N$ 到另一个流形 V 的映射. $(p,q)\in M\times N$ 点的微分 φ_* 可以表示如下. 若 $Z\in T_{(p,q)}(M\times N)$ 对应于 $(X,Y)\in T_p(M)+T_q(N)$, 那么

$$\varphi_*(Z)=\varphi_{1*}(X)+\varphi_{2*}(Y),$$

其中 $\varphi_1:M\to V$ 和 $\varphi_2:N\to V$ 分别是由

$$\varphi_1(p')=\varphi(p',q),p'\in M \text{ 和 } \varphi_2(q')=\varphi(p,q'),q'\in N$$

定义的.

证明 从 $\bar{X},\bar{Y},\varphi_1$ 及 φ_2 的定义可得 $\varphi_*(\bar{X})=\varphi_{1*}(X)$ 和 $\varphi_*(\bar{Y})=\varphi_{2*}(Y)$. 从而 $\varphi_*(Z)=\varphi_*(\bar{X})+\varphi_*(\bar{Y})=\varphi_{1*}(X)+\varphi_{2*}(Y)$. 证毕.

注意到, 若 $V=M\times N$ 且 φ 为恒等变换, 那么上述命题简化为公式 $Z=\bar{X}+\bar{Y}$.

令 X 是流形 M 上的向量场. 若 M 中的曲线 $x(t)$, 对于每个参数值 t_0, 向量 $X_{x(t_0)}$ 在 $x(t_0)$ 点切于曲线 $x(t)$, 则将曲线 $x(t)$ 称为 X 的积分曲线. 对于 M 上的任何点 p_0 都有对 $|t|<\varepsilon$(ε 为某个正数) 有定义的 X 的唯一一条积分曲线 $x(t)$ 使得 $p_0=x(0)$. 实际上, 令 $u^1,\cdots,u^n$ 是 p_0 点的某个邻域 U 上的局部坐标系并且在 U 中令 $X=\Sigma\xi^j(\partial/\partial u^j)$, 那么 X 的一条积分曲线就是下列常微分方程组的一个解:

$$du^j/dt=\xi^j(u^1(t),\cdots,u^n(t)),\quad j=1,\cdots,n.$$

这个结论可从常微分方程组的基本定理得出 (参看附录 1).

M 的一个单参数 (可微) 变换群是一个满足下列条件的从 $\mathbf{R}\times M$ 到 M 的映射 $(t,p)\in\mathbf{R}\times M\to\varphi_t(p)\in M$:

(1) 对每个 $t\in\mathbf{R}$, $\varphi_t:p\to\varphi_t(p)$ 是 M 的一个变换;

(2) 对所有 $t,s\in\mathbf{R}$ 和 $p\in M$, $\varphi_{t+s}(p)=\varphi_t(\varphi_s(p))$.

每个单参数变换群 φ_t 诱导一个向量场 X 如下. 对于每一点 $p \in M$, X_p 是曲线 $x(t) = \varphi_t(p)$(称为过 p 点的轨道) 在 $p = \varphi_0(p)$ 点的切向量. 轨道 $\varphi_t(p)$ 是 X 的一条从 p 点出发的积分曲线. 一个局部单参数变换群可用同样的方式定义, 只是 $\varphi_t(p)$ 仅对 O 点的一个邻域中的 t 和 M 的一个开集中的 p 有定义. 更确切地说, 令 I_ε 是开区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$, 令 U 是 M 的一个开集, 定义在 $I_\varepsilon \times U$ 上的局部单参数变换群是从 $I_\varepsilon \times U$ 到 M 中的一个满足下列条件的映射:

(1′) 对于每一个 $t \in I_\varepsilon$, $\varphi_t : p \to \varphi_t(p)$ 是一个从 U 到 M 的开集 $\varphi_t(U)$ 上的微分同胚;

(2′) 如果 $t, s, t+s \in I_\varepsilon$ 且 $p, \varphi_s(p) \in U$, 那么

$$\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p)).$$

像在单参数变换群的情况那样, φ_t 诱导一个定义在 U 上的向量场 X. 现在我们来证明它的逆命题.

命题 1.5　令 X 是流形 M 上的一个向量场. 对于 M 的每一点 p_0, 均存在 p_0 点的一个邻域 U、一个正数 ε 和一个诱导给定向量场 X 的局部单参数变换群 $\varphi_t : U \to M, t \in I_\varepsilon$.

我们将说明 X 在 p_0 点的一个邻域中生成一个局部单参数变换群 φ_t. 如果存在 M 的一个诱导向量场 X 的 (整体) 单参数变换群, 则称 X 是完备的. 如果对某个 ε, $\varphi_t(p)$ 在 $I_\varepsilon \times M$ 上有定义, 那么 X 是完备的.

证明　令 $u^1, \cdots, u^n$ 是 p_0 点的邻域 W 上的局部坐标系且使得 $u^1(p_0) = \cdots = u^n(p_0) = 0$. 在 W 中令 $X = \sum \xi^i(u^1, \cdots, u^n)\dfrac{\partial}{\partial u^i}$. 考虑下列以 $f^1(t), \cdots, f^n(t)$ 为未知函数的线性常微分方程组:

$$df^i/dt = \xi^i(f^1(t), \cdots, f^n(t)), \quad i = 1, \cdots, n.$$

由常微分方程组的基本定理 (见附录 1), 存在对满足 $|u^i| < \delta_1$ 的 $u = (u^1, \cdots, u^n)$ 和满足 $|t| < \varepsilon_1$ 的 t 有定义的唯一一组函数 $f^1(t; u), \cdots, f^n(t; u)$, 这组函数对每个固定的 u 都构成微分方程组的一个解并且满足初始条件:

$$f^i(0; u) = u^i.$$

对 $|t| < \varepsilon_1$ 和 $U_1 = \{u; |u^i| < \delta_1\}$ 中的 u 置 $\varphi_t(u) = (f^1(t; u), \cdots, f^n(t; u))$. 如果 $|t|$、$|s|$ 及 $|t+s|$ 都小于 ε_1 并且 u 和 $\varphi_s(u)$ 都在 U_1 中, 那么容易看出函数 $g^i(t) = f^i(t+s; u)$ 是微分方程组满足初始条件 $g^i(0) = f^i(s; u)$ 的解. 由解的唯一性得 $g^i(t) = f^i(t; \varphi_s(u))$. 这证明 $\varphi_t(\varphi_s(u)) = \varphi_{t+s}(u)$. 因为 φ_0 是 U_1 的恒等变换, 所以存在 $\delta > 0$ 和 $\varepsilon > 0$ 使得对于 $U = \{u; |u^i| < \delta\}$, 当 $|t| < \varepsilon$ 时 $\varphi_t(U) \subset U_1$. 因此

对一切 $u \in U$ 和 $|t| < \varepsilon$, $\varphi_{-t}(\varphi_t(u)) = \varphi_t(\varphi_{-t}(u)) = \varphi_0(u) = u$. 这证明对于 $|t| < \varepsilon$, φ_t 是 U 上的微分同胚. 从而 φ_t 是一个在 $I_\varepsilon \times U$ 上定义的局部单参数变换群. 由其构造, 显然 φ_t 在 U 中诱导给定的向量场 X. 证毕.

评注 在上述过程中我们还证明了定义在 $I_\varepsilon \times U$ 上的两个局部单参数变换群 φ_t 和 ψ_t 在 U 上诱导同一个向量场, 从而它们在 U 上是一致的.

命题 1.6 在一个紧流形 M 上, 每个向量场 X 都是完备的.

证明 对于每一点 $p \in M$, 令 $U(p)$ 是 p 点的一个邻域且 $\varepsilon(p)$ 是一个正数使得向量场 X 在 $I_{\varepsilon(p)} \times U(p)$ 上生成一个局部单参数变换群 φ_t. 因为 M 是紧的, 所以开覆盖 $\{U(p), p \in M\}$ 具有有限子覆盖 $\{U(p_i); i = 1, \cdots, k\}$. 令 $\varepsilon = \min\{\varepsilon(p_1), \cdots, \varepsilon(p_k)\}$. 显然 $\varphi_t(p)$ 在 $I_\varepsilon \times M$ 上有定义, 因而在 $\mathbf{R} \times M$ 上有定义. 证毕.

在以下的叙述中, 我们将不再明显地给出一个给定向量场 X 和相应局部单参数变换群 φ_t 的定义域. 每一个公式, 只要它有意义, 就认为它是成立的, 而且在必要时容易确定所涉及的向量场或变换的定义域.

命题 1.7 令 φ 是 M 上的一个变换, 若向量场 X 生成一个局部单参数变换群 φ_t, 则向量场 $\varphi_* X$ 生成 $\varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}$.

证明 显然 $\varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}$ 是一个局部单参数变换群. 为证明它诱导向量场 $\varphi_* X$, 令 p 是 M 的任意一点且 $q = \varphi^{-1}(p)$. 因为 φ_t 诱导 X, 所以向量 $X_q \in T_q(M)$ 是曲线 $x(t) = \varphi_t(q)$ 在 $q = x(0)$ 点的切向量. 由此可知向量

$$(\varphi_* X)_p = \varphi_*(X_q) \in T_p(M)$$

切于曲线 $y_t = \varphi \circ \varphi_t(q) = \varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}(p)$. 证毕.

推论 1.8 向量场 X 是在 φ 作用下不变的, 即 $\varphi_* X = X$, 当且仅当 φ 与 φ_t 交换.

现在我们给出两个向量场的括号运算 $[X, Y]$ 的几何解释.

命题 1.9 令 X 和 Y 都是 M 上的向量场, 如果 X 生成一个局部单参数变换群 φ_t, 那么

$$[X, Y] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[Y - (\varphi_t)_* Y].$$

更确切地说是

$$[X, Y]_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[Y_p - ((\varphi_t)_* Y)_p], \quad p \in M.$$

右边的极限是对于切向量空间 $T_p(M)$ 的自然拓扑来取的. 我们首先证明两个引理.

引理 1　如果 $f(t,p)$ 是 $I_\varepsilon \times M$ 上的一个函数 (其中 I_ε 是开区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$) 使得 $f(0,p)=0$ 对所有 $p\in M$ 成立, 那么在 $I_\varepsilon \times M$ 上存在一个函数 $g(t,p)$ 使得 $f(t,p)=t\cdot g(t,p)$. 而且对于 $p\in M$, $g(0,p)=f'(0,p)$, 其中 $f'=\partial f/\partial t$.

证明　只需定义

$$g(t,p)=\int_0^1 f'(ts,p)ds$$

即可.　证毕.

引理 2　令 X 生成 φ_t. 对于 M 上的任何函数 f 都存在一个函数 $gt(p)=g(t,p)$ 使得 $f\circ\varphi_t=f+t\cdot g_t$ 和 $g_0=Xf$ 在 M 上成立.

对每个固定点 p 和某个 ε, 函数 $g(t,p)$ 在 $|t|<\varepsilon$ 中有定义.

证明　考虑 $f(t,p)=f(\varphi_t(p))-f(p)$ 并应用引理 1, 则有 $f\circ\varphi_t=f+t\cdot g_t$. 于是得

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(\varphi_t(p))-f(p)]=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}f(t,p)=\lim_{t\to 0}g_t(p)=g_0(p),$$

证毕.

命题 1.9 的证明　在 M 上给定一个函数 f, 取一个函数 g_t 使得 $f\circ\varphi_t=f+t\cdot g_t$ 且 $g_0=Xf$(引理 2). 置 $p(t)=\varphi_t^{-1}(p)$. 那么

$$((\varphi_t)_*Y)_pf=(Y(f\circ\varphi_t))_{p(t)}=(Yf)_{p(t)}+t\cdot(Yg_t)_{p(t)}$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[Y-(\varphi_t)_*Y]_pf&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(Yf)_p-(Yf)_{p(t)}]-\lim_{t\to 0}(Yg_t)_{p(t)}\\&=X_p(Yf)-Y_pg_0=[X,Y]_pf.\end{aligned}$$

这就证明了命题 1.9 的结论.　证毕.

推论 1.10　沿用命题 1.9 的记号, 更一般地, 对 s 的任何值都有

$$(\varphi_s)_*[X,Y]=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\varphi_s)_*Y-(\varphi_{s+t})_*Y].$$

证明　对于 s 的一个固定值, 考虑向量场 $(\varphi_s)_*Y$ 并应用命题 1.9, 则有

$$\begin{aligned}[X,(\varphi_s)_*Y]&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\varphi_s)_*Y-(\varphi_t)_*\circ(\varphi_s)_*Y]\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\varphi_s)_*Y-(\varphi_{s+t})_*Y],\end{aligned}$$

这是因为 $\varphi_s\circ\varphi_t=\varphi_{s+t}$. 另一方面由推论 1.8 得 $(\varphi_s)_*X=X$. 因为 $(\varphi_s)_*$ 保持括号运算, 故有

$$(\varphi_s)_*[X,Y]=[X,(\varphi_s)_*Y].$$　证毕.

评注 推论 1.10 的结论可以写成

$$(d((\varphi_t)_*Y)/dt)_{t=s} = -(\varphi_s)_*[X,Y].$$

推论 1.11 假设 X 和 Y 分别生成局部单参数群 φ_t 和 ψ_s, 那么当且仅当 $[X,Y]=0$ 时, $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ 对一切 s 和 t 成立.

证明 如果 $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ 对一切 s 和 t 成立, 那么由推论 1.8, Y 在每一个 φ_t 作用下不变. 由命题 1.9, $[X,Y]=0$. 反之, 若 $[X,Y]=0$, 那么由推论 1.10 $d((\varphi_t)_*Y)/dt=0$ 对一切 t 成立 (参看上面的评注). 因此 $(\varphi_t)_*Y$ 在每一点 p 都是一个常向量, 因而 Y 是在 φ_t 作用下不变的. 由推论 1.8, 每一个 ψ_s 与每一个 ψ_t 交换. 证毕.

1.2 张量代数

固定一个基域 $\mathbf{F}$, 在我们的应用中它将是实数域 $\mathbf{R}$ 或者复数域 $\mathbf{C}$. 除非另有说明, 我们考虑的所有向量空间都是 $\mathbf{F}$ 上的有限维空间. 定义两个向量空间 U 和 V 的张量积 $U\otimes V$ 如下. 令 $M(U,V)$ 是一个以 $U\times V$ 为底集合的向量空间, 即由二元组 (u,v) 生成的自由向量空间, 其中 $u\in U$, $v\in V$. 令 N 是由下列形式的元素所张成的 $M(U,V)$ 的子空间:

$$(u+u',v)-(u,v)-(u',v), \quad (u,v+v')-(u,v)-(u,v')$$
$$(ru,v)-r(u,v), \quad (u,rv)-r(u,v)$$

其中, $u,u'\in U$, $v,v'\in V$, $r\in\mathbf{F}$. 置 $U\otimes V = M(U,V)/N$. 每一个二元组 (u,v), 看作 $M(U,V)$ 的元素, 在自然投影 $M(U,V)\to U\otimes V$ 下的象记为 $u\otimes v$. 定义从 $U\times V$ 到 $U\otimes V$ 的标准双线性映射 φ 为

$$\varphi(u,v)=u\otimes v, \quad (u,v)\in U\times V.$$

令 W 是一个向量空间, 令 $\psi: U\times V\to W$ 是一个双线性映射. 若对每一个向量空间 S 和每一个双线性映射 $f: U\times V\to S$, 都存在唯一的双线性映射 $g: W\to S$ 使得 $f=g\circ\psi$, 则称二元组 (W,ψ) 对 (U,V) 具有泛因子分解性质.

命题 2.1 二元组 $(U\otimes V,\varphi)$ 对 $U\times V$ 具有泛因子分解性质. 如果二元组 (W,ψ) 对 $U\times V$ 有泛因子分解性, 那么 $(U\otimes V,\varphi)$ 和 (W,ψ) 在下述意义上是同构的: 存在一个同构 $\sigma: U\otimes V\to W$ 使得 $\psi=\sigma\circ\varphi$.

证明 令 S 是任何一个向量空间. $f: U\times V\to S$ 是任何双线性映射. 由于 $U\times V$ 是 $M(U,V)$ 的底集合. 因而可将 f 扩张成唯一的双线性映射 $f': M(U,V)\to S$. 因为 f 是双线性的, 所以 f' 在 N 上为零. 因而 f' 诱导一个线性映射 $g: U\otimes V\to S$.

显然 $f = g\circ\varphi$. 这样一个映射 g 的唯一性可从 $\varphi(U\times V)$ 张成 $U\otimes V$ 这一事实得出. 令 (W,ψ) 是一个对 $U\times V$ 具有泛因子分解性的二元组. 由 $(U\otimes V,\varphi)$ 的 (相应 (W,ψ) 的) 泛因子分解性, 存在唯一的线性映射 $\sigma: U\otimes V\to W$(相应的是 $\tau: W\to U\otimes V$) 使得 $\psi=\sigma\circ\varphi$(相应为 $\varphi=\tau\circ\psi$). 由此 $\varphi=\tau\circ\sigma\circ\varphi$, $\psi=\sigma\circ\tau\bullet\psi$. 利用泛因子分解性定义中 g 的唯一性得知 $\tau\circ\sigma$ 和 $\sigma\circ\tau$ 分别是 $U\times V$ 和 W 上的恒等变换. 证毕.

命题 2.2 对所有 $u\in U$ 和 $v\in V$, 有从 $U\otimes V$ 到 $V\otimes U$ 的唯一一个同构将 $u\otimes v$ 映射成 $v\otimes u$.

证明 令 $f: U\times V\to V\otimes U$ 是由 $f(u,v)=v\otimes u$ 定义的双线性映射. 由命题 2.1, 有唯一的一个线性映射 $g: U\otimes V\to V\otimes U$ 使得 $g(u\otimes v)=v\otimes u$. 类似地, 有唯一一个线性映射 g': $V\otimes U\to U\otimes V$ 使得 $g'(v\otimes u)=u\otimes v$. 显然, $g'\circ g$ 和 $g\circ g'$ 分别是 $U\otimes V$ 和 $V\otimes U$ 上的恒等变换. 因而 g 就是所要求的同构. 证毕.

下列两个命题的证明是类似的, 因而将其省略.

命题 2.3 若将基域 $\mathbf{F}$ 看成 $\mathbf{F}$ 上的 1 维向量空间, 则有从 $\mathbf{F}\otimes U$ 到 U 上的唯一一个同构, 它对所有 $r\in\mathbf{F}$ 和 $u\in U$, 均将 $r\otimes u$ 映射成 ru. 对于 $U\otimes F$ 和 U 也有类似的结果.

命题 2.4 对所有的 $u\in U, v\in V, w\in W$, 有从 $(U\otimes V)\otimes W$ 到 $U\otimes(V\otimes W)$ 的唯一一个同构将 $(u\otimes v)\otimes w$ 映射成 $u\otimes(v\otimes w)$.

因此写成 $U\otimes V\otimes W$ 是有意义的. 给定向量空间 $U_1,\cdots,U_k$, 则可以归纳地定义张量积 $U\otimes\cdots\otimes U_k$. 令 $\varphi: U_1\times\cdots\times U_k\to U_1\otimes\cdots\otimes U_k$ 是将 $(u_1,\cdots,u_k)$ 映射成 $u_1\otimes\cdots\otimes u_k$ 的多重线性映射. 那么就像在命题 2.1 中那样, 可以用 $U_1\times\cdots\times U_k$ 的泛因子分解性来刻画二元组 $(U_1\otimes\cdots\otimes U_k,\varphi)$.

命题 2.2 还可以推广. 对 $(1,\cdots,k)$ 的任何置换 π, 都有从 $U_1\otimes\cdots\otimes U_k$ 到 $U_{\pi(1)}\otimes\cdots\otimes U_{\pi(k)}$ 上的唯一一个同构将 $u_1\otimes\cdots\otimes u_k$ 映射成 $u_{\pi(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\pi(k)}$.

命题 2.4.1 给定线性映射 $f_j: U_j\to V_j, j=1,2$, 则有唯一的一个线性映射 $f: U_1\otimes U_2\to V_1\otimes V_2$ 使得 $f(u_1\otimes u_2)=f(u_1)\otimes f(u_2)$ 对所有 $u_1\in U_1$ 和 $u_2\in U_2$ 成立.

证明 考虑将 (u_1,u_2) 映射成 $f_1(u_1)\otimes f_2(u_2)$ 的双线性映射 $U_1\times U_2\to V_1\otimes V_2$ 并应用命题 2.1. 证毕.

把命题 2.4.1 推广到多于两个映射的情形是明显的. 刚才给出的映射记为 $f_1\otimes f_2$.

命题 2.5 若以 U_1+U_2 表示 U_1 与 U_2 的直和, 则

$$(U_1+U_2)\otimes V=U_1\otimes V+U_2\otimes V.$$

类似地有

$$U \otimes (V_1 + V_2) = U \otimes V_1 + U \otimes V_2.$$

证明 令 $i_1 : U_1 \to U_1 + U_2$ 和 $i_2 : U_2 \to U_1 + U_2$ 为内射, 令 $p_1 : U_1 + U_2 \to U_1$ 和 $p_2 : U_1 + U_2 \to U_2$ 是投影映射, 那么 $p_1 \circ i_1$ 和 $p_2 \circ i_2$ 分别为 U_1 和 U_2 上的恒等变换, $p_2 \circ i_1$ 和 $p_1 \circ i_2$ 都是零映射. 由命题 2.4.1, i_1 和 V 上的恒等变换诱导一个线性映射 $\bar{i} : U_1 \otimes V \to (U_1 + U_2) \otimes V$. 类似地定义 $\bar{i}_2$, $\bar{p}_1$ 和 $\bar{p}_2$. 由此可知, $\bar{p}_1 \circ \bar{i}_1$ 和 $\bar{p}_2 \circ \bar{i}_2$ 分别是 $U_1 \otimes V$ 和 $U_2 \otimes V$ 上的恒等变换并且 $\bar{p}_2 \circ \bar{i}_1$ 和 $\bar{p}_1 \circ \bar{i}_2$ 都是零映射. 这就证明了第一个同构, 第二个同构类似可证. 证毕.

由归纳法可以得出

$$(U_1 + \cdots + U_k) \otimes V = U_1 \otimes V + \cdots + U_k \otimes V.$$

命题 2.6 若 $u_1, \cdots, u_m$ 是 U 的基且 $v_1, \cdots, v_n$ 是 V 的基, 那么 $\{u_i \otimes v_j, i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n\}$ 是 $U \otimes V$ 的基. 尤其是, $\dim(U \otimes V) = \dim U \cdot \dim V$.

证明 令 U_i 是由 u_i 张成的 U 的 1 维子空间, V_j 是由 v_j 张成的 V 的 1 维子空间. 由命题 2.5,

$$U \otimes V = \sum_{i,j} U_i \otimes V_j.$$

由命题 2.3, 每个 $U_i \otimes V_j$ 是由 $u_i \otimes v_j$ 张成的 1 维向量空间. 证毕.

对于向量空间 U, 用 U^* 表示 U 的对偶向量空间. 对 $u \in U$ 和 $u^* \in U^*$, 用 $\langle u, u^* \rangle$ 表示线性泛函 u^* 在 u 上的值.

命题 2.7 令 $L(U^*, V)$ 是从 U^* 到 V 的线性映射组成的空间. 则有从 $U \otimes V$ 到 $L(U^*, V)$ 的唯一一个同构 g 使得对所有 $u \in U, v \in V$ 和 $u^* \in U^*$,

$$(g(u \otimes v))u^* = \langle u, u^* \rangle v.$$

证明 考虑由 $(f(u, v))u^* = \langle u, u^* \rangle v$ 定义的双线性映射 f: $U \times V \to L(U^*, V)$ 并应用命题 2.1, 则有唯一的线性映射 $g : U \otimes V \to L(U^*, V)$ 使得 $(g(u \otimes v))u^* = \langle u, u^* \rangle v$. 为证明 g 是一个同构, 令 $u_1, \cdots, u_m$ 是 U 的一个基, $u_1^*, \cdots, u_m^*$ 是 U^* 的对偶基且 $v_1, \cdots, v_n$ 是 V 的基. 我们来证明 $\{g(u_i \otimes v_j); i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n\}$ 是线性无关的. 如果 $\sum a_{ij} g(u_i \otimes v_j) = 0$, 其中 $a_{ij} \in \mathbf{F}$, 那么

$$0 = \left(\sum a_{ij} g(u_i \otimes v_j)\right) u_k^* = \Sigma a_{kj} v_j,$$

由此所有 a_{ij} 为零. 由于 $\dim(U \otimes V) = \dim L(U^*, V)$, 所以 g 是从 $U \otimes V$ 到 $L(U^*, V)$ 的同构. 证毕.

命题 2.8　给定两个向量空间 U 和 V, 则有从 $U^* \otimes V^*$ 到 $(U \otimes V)^*$ 的唯一同构 g 使得对所有 $u \in U, u^* \in U^*, v \in V, v^* \in V^*$,

$$(g(u^* \otimes v^*))(u \otimes v) = \langle u, u^* \rangle \cdot \langle v, v^* \rangle.$$

证明　将命题 2.1 应用于由 $(f(u^*, v^*))(u \otimes v) = \langle u, u^* \rangle \langle v, v^* \rangle$ 定义的双线性映射 $f : U^* \times V^* \to (U \otimes V)^*$. 为证明 g 是一个同构, 取 U、V、U^* 及 V^* 的基并且像在命题 2.7 的证明中那样进行.　证毕.

现在来定义一个固定向量空间 V 上的各种张量空间. 对于一个正整数 r, 我们将 $\boldsymbol{T}^r = V \otimes \cdots \otimes V$($r$ 次张量积) 称为 r 阶逆变张量空间, 将 $\boldsymbol{T}^r$ 的元素称为 r 阶逆变张量. 若 $r = 1$, 则 $\boldsymbol{T}^1$ 就是 V. 按照惯例. 约定 $\boldsymbol{T}^0$ 为基域 $\boldsymbol{F}$ 自身. 类似地把 $\boldsymbol{T}_s = V^* \otimes \cdots \otimes V^*$($s$ 次张量积) 称为 s 阶协张量空间, 而称它的元素为 s 阶协变张量. 那么 $\boldsymbol{T}_1 = V^*$, 而且习惯上约定 $\boldsymbol{T}_0 = F$.

下面给出这些张量关于 V 的基的表达式. 令 $e_1, \cdots, e_n$ 是 V 的一个基而 $e^1, \cdots, e^n$ 是 V^* 的对偶基. 由命题 2.6, $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}; 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n\}$ 是 $\boldsymbol{T}_r$ 的基. 每个 r 阶逆变张量 K 都能唯一地表示成线性组合

$$K = \sum_{i_1, \cdots, i_r} K^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r},$$

其中 $K^{i_1 \cdots i_r}$ 是 K 关于 V 的基 $e_1, \cdots, e_n$ 的分量. 类似地每一个 s 阶协变张量 L 都能唯一地表示成线性组合

$$L = \sum_{j_1, \cdots, j_s} L_{j_1 \cdots j_s} e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}.$$

其中 $L_{j_1 \cdots j_s}$ 是 L 的分量.

对于 V 的基的改变, 张量的分量服从下列变换. 令 $e_1, \cdots, e_n$ 和 $\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n$ 是 V 的两个通过下列线性变换相关的基

$$e_i = \sum_j A_i^j \bar{e}_j, \quad i = 1, \cdots, n.$$

V^* 的对偶基的相应变化由下式给出:

$$e^i = \sum_j B_j^i \bar{e}^j, \quad i = 1, \cdots, n,$$

其中 $B = (B_j^i)$ 是矩阵 $A = (A_j^i)$ 的逆矩阵. 因而

$$\sum_j A_j^i B_k^j = \delta_k^i.$$

如果 K 是一个 r 阶逆变张量, 则它关于 $\{e_i\}$ 和 $\{\bar{e}_i\}$ 的分量 $K^{i_1\cdots i_r}$ 和 $\bar{K}^{i_1\cdots i_r}$ 通过下式相关:

$$\bar{K}^{i_1\cdots i_r}=\sum_{j_1,\cdots,j_r}A^{i_1}_{j_1}\cdots A^{i_r}_{j_r}K^{j_1\cdots j_r}.$$

类似地, s 阶协变张量 L 的分量通过下式相关:

$$\bar{L}_{i_1\cdots i_r}=\sum_{j_1,\cdots,j_s}B^{j_1}_{i_1}\cdots B^{j_s}_{i_s}L_{j_1\cdots j_s}$$

对于这些公式的验证留给读者.

我们把 (r,s) 型 (混合) 张量空间或 r 阶逆变、s 阶协变的张量空间定义为张量积 $\boldsymbol{T}^r_s=\boldsymbol{T}^r\otimes\boldsymbol{T}_s=V\otimes\cdots\otimes V\otimes V^*\otimes\cdots\otimes V^*$($V$ 乘 r 次, V^* 乘 s 次). 特别, $\boldsymbol{T}^r_0=\boldsymbol{T}^r,\boldsymbol{T}^0_s=\boldsymbol{T}_s,\boldsymbol{T}^0_0=\boldsymbol{F}$. $\boldsymbol{T}^r_s$ 的元素称为 (r,s) 型张量或 r 阶逆变、s 阶协变张量. 用 V 的基 $e_1,\cdots,e_n$ 和 V^* 的对偶基 $e^1,\cdots,e^n$, 每个 (r,s) 型张量 K 可唯一地表示成

$$K=\sum_{i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s}K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s},$$

其中 $K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 称为 K 关于基 $e_1,\cdots,e_n$ 的分量. 对于基的变换 $\bar{e}_i=\sum\limits_j A^j_ie_j$, 相应有分量的下列变换:

(2.1) $\bar{K}^{i_1\cdots j_r}_{j_1\cdots j_s}=\sum A^{i_1}_{k_1}\cdots A^{i_r}_{k_r}B^{m_1}_{j_1}\cdots B^{m_s}_{j_s}K^{k_1\cdots k_r}_{m_1\cdots m_s}.$

置 $\boldsymbol{T}=\sum\limits_{r,s=0}^{\infty}\boldsymbol{T}^r_s$, 因而 T 的元素具有 $\sum\limits_{r,s=0}^{\infty}K^r_s$ 的形式, 其中, $K^r_s\in\boldsymbol{T}^r_s$ 除有限个之外全都为零. 我们通过定义两个张量 $K\in\boldsymbol{T}^r_s$ 和 $L\in\boldsymbol{T}^p_q$ 的积而使 $\boldsymbol{T}$ 成为 $\boldsymbol{F}$ 上的一个结合代数如下. 从张量积的泛因子分解性质可知存在从 $\boldsymbol{T}^r_s\times\boldsymbol{T}^p_q$ 到 $\boldsymbol{T}^{r+p}_{s+q}$ 中的唯一双线性映射将 $(v_1\otimes\cdots\otimes v_r\otimes v_1^*\otimes\cdots\otimes v_s^*,w_1\otimes\cdots\otimes w_p\otimes w_1^*\otimes\cdots\otimes w_q^*)\in\boldsymbol{T}^r_s\times\boldsymbol{T}^p_q$ 映射成 $(v_1\otimes\cdots\otimes v_r\otimes w_1\otimes\cdots\otimes w_p\otimes v_1^*\otimes\cdots\otimes v_s^*\otimes w_1^*\otimes\cdots\otimes w_q^*)\in\boldsymbol{T}^{r+p}_{s+q}$. $(K,L)\in\boldsymbol{T}^r_s\times\boldsymbol{T}^p_q$ 在这个双线性映射下的象记为 $K\otimes L$. 用分量表示, 若 K 由 $K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 给出, L 由 $L^{k_1\cdots k_p}_{m_1\cdots m_q}$ 给出, 那么

$$(K\otimes L)^{i_1\cdots i_{r+p}}_{j_1\cdots j_{s+q}}=K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}L^{i_{r+1}\cdots i_{r+p}}_{j_{s+1}\cdots j_{s+q}}.$$

现在来定义缩并运算. 令 $r,s\geqslant 1$, 对于每一个适合 $1\leqslant i\leqslant r$ 和 $1\leqslant j\leqslant s$ 的整数序对 (i,j), 指定一个从 $\boldsymbol{T}^r_s$ 到 $\boldsymbol{T}^{r-1}_{s-1}$ 的线性映射, 称为缩并且记为 C, 这个映射把 $v_1\otimes\cdots\otimes v_r\otimes v_1^*\otimes\cdots\otimes v_s^*$ 映射成

$$\langle v_i,v_j^*\rangle v_1\otimes\cdots\otimes v_{r-1}\otimes v_{r+1}\otimes\cdots\otimes v_r\otimes v_1^*\otimes\cdots\otimes v_{j-1}^*\otimes v_{j+1}^*\otimes\cdots\otimes v_s^*,$$

其中, $v_1,\cdots,v_r\in V$, $v_1^*,\cdots,v_s^*\in V^*$. C 的存在性和唯一性可以从张量积的泛因子分解性得出. 用分量表示, 则缩并运算把以 $K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 为分量的张量 $K\in\boldsymbol{T}^r_s$ 映射成张

量 $CK \in \boldsymbol{T}_{s-1}^{r-1}$, 其分量由下式给出:

$$(CK)_{j_1\cdots j_{s-1}}^{i_1\cdots i_{r-1}} = \sum_k K_{j_1\cdots k\cdots j_{s-1}}^{i_1\cdots k\cdots i_{r-1}},$$

其中, 上标 k 出现在第 i 个位置, 下标 k 出现在第 j 个位置.

现在我们把张量解释为多重线性映射.

命题 2.9 $\boldsymbol{T}_r$ 自然同构于从 $V\times\cdots\times V$ 到 $\boldsymbol{F}$ 中的所有 r 线性映射构成的向量空间.

命题 2.10 $\boldsymbol{T}^r$ 自然同构于从 $V^*\times\cdots\times V^*$ 到 $\boldsymbol{F}$ 的所有 r 线性映射构成的向量空间.

证明 我们只证明命题 2.9. 推广命题 2.8, 则可以看出 $\boldsymbol{T}_r = V^*\otimes\cdots\otimes V^*$ 是 $\boldsymbol{T}^r = V\otimes\cdots\otimes V$ 的对偶向量空间. 另一方面, 从张量积的泛因子分解性可知, $\boldsymbol{T}^r = V\otimes\cdots\otimes V$ 到 $\boldsymbol{F}$ 中的线性映射组成的空间同构于从 $V\times\cdots\times V$ 到 $\boldsymbol{F}$ 中的 r 线性映射组成的空间. 证毕.

按照命题 2.9 中的解释, 我们把张量 $K\in\boldsymbol{T}_r$ 看作 r 线性映射 $V\times\cdots\times V\to\boldsymbol{F}$ 并写成 $K(v_1,\cdots,v_r)\in\boldsymbol{F}, (v_1,\cdots,v_r)\in V$.

命题 2.11 $\boldsymbol{T}_r^1$ 自然同构于从 $V\times\cdots\times V$ 到 V 的所有 r 线性映射组成的向量空间.

证明 由定义. $\boldsymbol{T}_r^1$ 就是 $V\otimes\boldsymbol{T}_r$, 而由命题 2.2, $V\otimes\boldsymbol{T}_r$ 典范同构于 $\boldsymbol{T}_r\otimes V$. 由命题 2.7, $\boldsymbol{T}_r\otimes V$ 同构于 $\boldsymbol{T}_r$ 的对偶空间 $\boldsymbol{T}^r$ 到 V 中的线性映射构成的空间. 另一方面. 由张量积的泛因子分解性质, $\boldsymbol{T}^r$ 到 V 中的线性映射组成的空间可等同于从 $V\times\cdots\times V$ 到 V 中的 r 线性映射组成的空间. 证毕.

由这种解释, 任何 $(1,r)$ 型张量 K 是从 $V\times\cdots\otimes V$ 到 V 中并将 $(v_1,\cdots,v_r)$ 映射成 $K(v_1,\cdots,v_r)\in V$ 的线性映射. 若 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的一个基, 则 $K = \sum K_{j_1\cdots j_r}^i e_i\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_r}$ 对应于从 $V\times\cdots\times V$ 到 V 中的一个 r 线性映射并且使得 $K(e^{j_1},\cdots,e^{j_r}) = \sum\limits_i K_{j_1\cdots j_r}^i e_i$.

一般可以对 (r,s) 型张量作类似的解释. 但我们不再深入进行下去.

例 2.1 若 $v\in V, v^*\in V^*$, 则 $v\otimes v^*$ 是一个 $(1,1)$ 型张量. 缩并运算 $C\colon \boldsymbol{T}_1^1\to\boldsymbol{F}$ 把 $v\otimes v^*$ 映射成 $\langle v,v^*\rangle$. 一般, 一个 $(1,1)$ 型张量 K 可以看作 V 上的一个线性自同态, 那么 K 的缩并 CK 是相应自同态的迹. 实际上, 若 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的一个基且 K 关于这个基的分量是 K_j^i, 那么相应于 K 的自同态将 e_j 映射成 $\sum\limits_i K_j^i e_i$. 显然 K 的迹和 K 的缩并 CK 都等于 $\sum\limits_i K_i^i$.

例 2.2 一个实向量空间 V 上的内积 g 是一个 2 阶协变张量并且满足: (1) $g(v,v)\geqslant 0$, 当且仅当 $v=0$ 时 $g(v,v)=0$(正定性); (2) $g(v,v')=g(v',v)$(对称

性).

令 $\boldsymbol{T}(U)$ 和 $\boldsymbol{T}(V)$ 是向量空间 U 和 V 上的张量代数. 若 A 是从 U 到 V 的一个线性同构, 那么它的转置 A^* 是从 V^* 到 U^* 的线性同构而且 A^{*-1} 是从 U^* 到 V^* 的线性同构. 由命题 2.4 得到一个线性同构 $A\otimes A^{*-1}$: $U\otimes U^*\to V\otimes V^*$. 一般, 可得到一个从 $\boldsymbol{T}(U)$ 到 $\boldsymbol{T}(V)$ 的同构, 它将 $\boldsymbol{T}^r_s(U)$ 映射到 $\boldsymbol{T}^r_s(V)$ 上. 这个同构 (称为 A 的扩张并且用同一字母 A 表示) 是唯一一个能扩张 $A: U\to V$ 的代数同构 $\boldsymbol{T}(U)\to\boldsymbol{T}(V)$. 唯一性从 $\boldsymbol{T}(U)$ 是由 $\boldsymbol{F}$、U 和 U^* 生成的这一事实得出. 同样容易看出 A 的扩张与一切缩并 C 交换.

命题 2.12 在从向量空间 U 到另一个向量空间 V 的线性同构和从 $\boldsymbol{T}(U)$ 到 $\boldsymbol{T}(V)$ 的代数同构之间存在一个自然的一一对应. 该对应能够保型而且与缩并运算交换.

特别, V 的自同构群自然同构于张量代数 $\boldsymbol{T}(V)$ 的自同构群, 该同构保型并且与缩并运算交换.

证明 唯一需要证明的是从 $\boldsymbol{T}(U)$ 到 $\boldsymbol{T}(V)$ 的每个代数同构 f 都是由从 U 到 V 上的一个同构 A 而诱导的, 假如 f 保型并且与缩并运算交换. 因为 f 是保型的, 所以它把 $\boldsymbol{T}^1_0(U)=U$ 同构地映射到 $\boldsymbol{T}^1_0(V)=V$ 上. 将 f 在 U 上的限制记为 A. 由于 f 把域 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{T}^0_0$ 的每个元素映射到其自身并且与每个缩并运算 C 交换, 所以对所有 $u\in U$ 和 $u^*\in U^*$ 都有

$$\begin{aligned}(Au, fu^*) &= (fu, fu^*) = C(fu\otimes fu^*) = C(f(u\otimes u^*))\\ &= f(C(u\otimes u^*)) = f(\langle u, u^*\rangle) = \langle u, u^*\rangle.\end{aligned}$$

因此 $fu^*=A^{*-1}u^*$. A 的扩张与 f 在 $\boldsymbol{F}$、U 及 U^* 上一致. 由于张量代数 $\boldsymbol{T}(U)$ 是由 $\boldsymbol{F}$、U 和 U^* 生成的, 所以 f 与 A 的扩张一致. 证毕.

令 $\boldsymbol{T}$ 是向量空间 V 上的张量代数. 若 $\boldsymbol{T}$ 的一个线性自同态 D 满足下列条件则称之为一个导 (算) 子:

(a) D 是保型的, 即 D 将 $\boldsymbol{T}^r_s$ 映入其自身;

(b) D 与每一个缩并运算 C 交换.

$\boldsymbol{T}$ 的导算子的集合构成一个向量空间. 若对导子 D 和 D' 置 $[D, D']=DD'-D'D$, 则该集合构成一个 Lie 代数. 类似地, V 的线性自同态的集合构成一个 Lie 代数. 因为由 (a), 导子 D 将 $\boldsymbol{T}^1_0=V$ 映入它自身, 所以 D 诱导 V 的一个自同态, 比方说是 B.

命题 2.13 $\boldsymbol{T}(V)$ 的导子构成的 Lie 代数与 V 的自同态构成的 Lie 代数同构. 这个同构是通过对每个导子指派它在 V 上的限制而给出的.

证明 显然 $D\to B$ 是 Lie 代数同态. 从 (b) 易知 D 将 $\boldsymbol{F}$ 的每个元素映射为

0. 从而对 $v \in V$ 和 $v^* \in V^*$ 有

$$\begin{aligned}0 &= D(\langle v, v^*\rangle) = D(C(v\otimes v^*)) = C(D(v\otimes v^*))\\ &= C(Dv\otimes v^* + v\otimes Dv^*) = \langle Dv, v^*\rangle + \langle v, Dv^*\rangle.\end{aligned}$$

由于 $Dv = Bv$, 因而 $Dv^* = -B^*v^*$, 其中 B^* 是 B 的转置. 因为 $\boldsymbol{T}$ 由 $\boldsymbol{F}$、V 和 V^* 生成, 所以 D 由它在 $\boldsymbol{F}$、V 和 V^* 上的限制唯一决定. 由此可知 $D \to B$ 为内射. 反之, 给定 V 的一个自同态 B, 对 $a \in \boldsymbol{F}$ 定义 $Da = 0$, 对 $v \in V$ 定义 $Dv = Bv$, 对 $v^* \in V^*$ 定义 $Dv^* = -B^*v^*$, 那么由 (b) 可将 D 扩张成 $\boldsymbol{T}$ 的一个导子. D 的存在性可从张量积的泛因子分解性得出. 证毕.

例 2.3　令 K 是一个 $(1,1)$ 型张量并且把它看作 V 的自同态, 那么由 V 的自同构 A 诱导的 $\boldsymbol{T}(V)$ 的自同构将张量 K 映射张量 AKA^{-1}. 另一方面, 由 V 的自同态 B 诱导的 $\boldsymbol{T}(V)$ 的导子把 K 映射成 $[B,K] = BK - KB$.

1.3 张 量 场

令 $T_x = T_x(M)$ 是流形 M 在 x 点的切空间而 $\boldsymbol{T}(x)$ 是 T_x 上的张量代数: $\boldsymbol{T}(x) = \sum \boldsymbol{T}^r_s(x)$, 其中 $\boldsymbol{T}^r_s(x)$ 是 T_x 上的 (r,s) 型张量空间. M 的子集 N 上的 (r,s) 型张量场是对 N 的每一点 x 指定一个张量 $K_x \in \boldsymbol{T}^r_s(x)$ 的一种指派. 在带局部坐标系 $x^1,\cdots,x^n$ 的坐标邻域 U 中, 取 $X_i = \partial/\partial x^i (i = 1,\cdots,n)$ 作为每个切空间 $T_x(x\in U)$ 的基, 而取 $\omega^i = dx^i (i = 1,\cdots,n)$ 作为 T^*_x 的对偶基. 那么在 U 上定义的 (r,s) 型张量场 K 可表示成

$$K_x = \sum K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} X_{i_1}\otimes\cdots\otimes X_{i_r}\otimes\omega^{j_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{j_s},$$

其中 $K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 是 U 上的函数, 称为 K 关于局部坐标系 $x^1,\cdots,x^n$ 的分量. 若各分量 $K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 都是 C^k 函数, 则称 K 是 C^k 的. 当然必须验证这个概念不依赖于局部坐标系. 由公式 (2.1), 这是容易做到的, 但公式 (2.1) 中的矩阵 (A^i_j) 必须代之以两个局部坐标之间的 Jacobi 矩阵. 今后除非另有说明, 均用"张量场"一词来表示 C^∞ 张量场.

在第 5 节, 我们将把张量场解释为 M 上某种纤维丛的可微截面. 在这里我们将从命题 2.9 和命题 2.11 的观点给出 $(0,r)$ 型和 $(1,r)$ 型张量场的另一种解释. 令 $\mathfrak{F}$ 是 M 上的 (C^∞) 函数组成的代数, 令 $\mathfrak{X}$ 是 M 上的向量场构成的 $\mathfrak{F}$ 模.

命题 3.1　M 上的 $(0,r)$ 型 (或 $(1,r)$ 型) 张量场 K 可以看作从 $\mathfrak{X}\times\cdots\times\mathfrak{X}$ 到 $\mathfrak{F}$(或 $\mathfrak{X}$) 中的 r 线性映射使得对于 $f_i \in \mathfrak{F}$ 和 $X_i \in \mathfrak{X}$,

$$K(f_1X_1,\cdots,f_rX_r) = f_1\cdots f_rK(X_1,\cdots,X_r).$$

反过来, 任何一个这样的映射均可看作一个 $(0,r)$ 型 (或 $(1,r)$ 型) 张量场.

证明 给定一个 $(0,r)$ 型 (或 $(1,r)$ 型) 张量场 K, 那么由命题 2.9(相应地由命题 2.11), K_x 是从 $T_x\times\cdots\times T_x$ 到 $\mathbf{R}$ 中 (或 T_x 中) 的 r 线性映射. 因而 $(X_1,\cdots,X_r)\to(K(x_1,\cdots,X_r))_x=K_x((X_1)_x,\cdots,(X_r)_x)$ 是一个满足上面条件的从 $\mathfrak{X}\times\cdots\times\mathfrak{X}$ 到 $\mathfrak{F}$ 中 (到 $\mathfrak{X}$ 中) 的 r 线性映射. 反过来. 令 K: $\mathfrak{X}\times\cdots\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{F}$(或 $\mathfrak{X}$) 是 $\mathfrak{F}$ 上的一个 r 线性映射. 证明的要点是说明 $K(X_1,\cdots,X_r)$ 在 x 点的函数的值或只依赖于 X_i 在 x 点的值. 这就蕴涵着对于每一点 x, K 诱导一个从 $T_x(M)\times\cdots\times T_x(M)$ 到 $\mathbf{R}$ 中 ($T_x(M)$ 中) 的 r 线性映射. 首先注意到映射 K 可以局部化. 即有

引理 若在 x 点的一个邻域 U 中 $X_i=Y_i, i=1,\cdots,r$, 那么在 U 中有

$$K(X_1,\cdots,X_r)=K(Y_1,\cdots,Y_r).$$

引理的证明 只需证明若在 U 中 $X_1=0$, 那么 $K(X_1,\cdots,X_r)=0$ 在 U 中成立. 对任何 $y\in U$, 令 f 是 M 上的一个可微函数并且使得 $f(y)=0$ 而在 U 外 $f=1$. 那么 $X_1=fX_1$ 且 $K(X_1,\cdots,X_r)=fK(X_1,\cdots,X_r)$, 它在 y 点为零. 这证明引理成立.

为了完成命题 3.1 的证明, 只要证明若 X_1 在一点 x 处为零, 那么 $K(X_1,\cdots,X_r)$ 也为零. 令 $x^1,\cdots,x^n$ 是 x 点处的一个坐标系使得 $X_1=\sum\limits_i f^i(\partial/\partial x^i)$. 我们可以在 M 上取向量场 Y_i 与可微函数 g^i 使得在 x 的某个邻域 U 中, $g^i=f^i$, $Y_i=\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ $(i=1,\cdots,n)$. 那么在 U 中 $X_1=\sum\limits_i g^iY_i$. 由引理, 在 U 中 $K(X_1,\cdots X_r)=\sum\limits_i g^iK(Y_i,X_2,\cdots,X_r)$. 因为对 $i=1,\cdots,n$, $g^i(x)=f^i(x)=0$, 所以 $K(X_1,\cdots,X_r)$ 在 x 点为零. 证毕.

例 3.1 M 上的 (正定)Riemann 度量是一个 2 阶协变张量场 g 并且满足下列条件: (1) 对所有 $X\in\mathfrak{X}$, $g(X,X)\geqslant 0$, 当且仅当 $X=0$ 时 $g(X,X)=0$; (2) 对所有 $X,Y\in\mathfrak{X}$, $g(X,Y)=g(Y,X)$. 换句话说, g 在每个切空间 $T_x(M)(x\in M)$ 中指派一个内积 (参看例 2.2). 用局部坐标系 $x^1,\cdots,x^n$ 表示, 则 g 的分量由 $g_{ij}=g\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i},\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right)$ 给出. 习惯上对 g 写成 $ds^2=\sum g_{ij}dx^idx^j$.

例 3.2 一个 r 次微分形式 ω 无非就是一个反对称的 r 阶协变张量场:

$$\omega(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r)})=\varepsilon(\pi)\omega(X_1,\cdots,X_r),$$

其中 π 是 $(1,2,\cdots,r)$ 的任意一个置换, $\varepsilon(\pi)$ 是它的符号. 对 x 点的任何协变张量 K 或 M 上的任何协变张量场 K, 我们定义反对称化算子 A 如下:

$$(AK)(X_1,\cdots,X_r)=\frac{1}{r!}\sum_{\pi}\varepsilon(\pi)\cdot K(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r)}),$$

其中求和运算是对 $(1,2,\cdots,r)$ 的所有置换 π 来取的. 容易验证对任何 K, AK 都是反对称的并且 K 是反对称的当且仅当 $AK=K$. 若 ω 和 ω' 分别是 r 次和 s 次的微分形式, 那么 $\omega\otimes\omega'$ 是一个 $r+s$ 阶的协变张量场并且 $\omega\wedge\omega'=A(\omega\otimes\omega')$.

例 3.3　对称化算子 S 可定义如下: 若 K 是一个 r 阶的协变张量或张量场, 那么

$$(SK)(X_1,\cdots,X_r)=\frac{1}{r!}\sum_{\pi}K(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r)}).$$

对于任何 K, SK 都是对称的并且 $SK=K$ 当且仅当 K 是对称的.

现在我们来定义 Lie 微分的概念. 令 $\mathfrak{T}_s^r(M)$ 是在 M 上定义的 (r,s) 型张量场的集合并且令 $\mathfrak{T}(M)=\sum\limits_{r\cdot s=0}^{\infty}\mathfrak{T}_s^r(M)$. 那么 $\mathfrak{T}(M)$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的代数, 乘法运算 $\otimes$ 是逐点定义的, 即若 $K,L\in\mathfrak{T}(M)$, 那么 $(K\otimes L)_x=K_x\otimes L_x$ 对所有点 $x\in M$ 成立. 若 φ 是 M 上的变换, 那么它的微分 φ_* 给出从切空间 $T_{\varphi^{-1}(x)}(M)$ 到切空间 $T_x(M)$ 的一个线性同构. 由命题 2.12, 这个线性同构能扩张成从张量代数 $\boldsymbol{T}(\varphi^{-1}(x))$ 到张量代数 $\boldsymbol{T}(x)$ 的同构, 将它记为 $\tilde{\varphi}$. 给定一个张量场 K, 则我们可用下式定义一个张量场 $\tilde{\varphi}K$:

$$(\tilde{\varphi}K)_x=\tilde{\varphi}(K_{\varphi^{-1}(x)}),\quad x\in M.$$

按这种方式, M 的每个变换 φ 诱导 $\mathfrak{T}(M)$ 的一个代数自同构, 该自同构保型并且与缩并运算交换.

令 X 是 M 上的一个向量场且 φ_t 是由 X 生成的局部单参数变换群 (参看命题 1.5). 现在定义张量场 K 关于向量场 X 的 Lie 导数 L_XK 如下. 为了简便起见, 假设 φ_t 是 M 的一个整体单参数变换群; 当 X 不完备时, 读者将会毫不困难地修改定义. 对于每个 t, $\tilde{\varphi}_t$ 都是代数 $\mathfrak{T}(M)$ 的自同构. 对 M 上的任何张量场 K, 置

$$(L_XK)_x=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[K_x-(\tilde{\varphi}_tK)_x].$$

$\mathfrak{T}(M)$ 到其自身的将 K 映射成 L_XK 的映射 L_X 称为关于 X 的 Lie 微分. 对此我们有

命题 3.2　关于向量场 X 的 Lie 微分满足下列条件:

(a) L_X 是 $\mathfrak{T}(M)$ 的一个导算子, 即它是线性的并且对所有 $K,K'\in\mathfrak{T}(M)$ 满足

$$L_X(K\otimes K')=(L_XK)\otimes K'+K\otimes(L_XK');$$

(b) L_X 是保型的: $L_X(\mathfrak{T}_s^r(M))\subset\mathfrak{T}_s^r(M)$;

(c) L_X 与张量场的每个缩并运算交换;

(d) 对每个函数 f, $L_Xf=Xf$;

(e) 对于每个向量场 Y, $L_X Y = [X, Y]$.

证明 显然 L_X 是线性的. 令 φ_t 是由 X 生成的局部单参数变换群. 那么

$$
\begin{aligned}
L_X(K \otimes K') &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[K \otimes K' - \tilde{\varphi}_t(K \otimes K')] \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[K \otimes K' - (\tilde{\varphi}_t K) \otimes (\tilde{\varphi}_t K')] \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[K \otimes K' - (\tilde{\varphi}_t K) \otimes K'] \\
&\quad + \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[(\tilde{\varphi}_t K) \otimes K' - (\tilde{\varphi}_t K) \otimes (\tilde{\varphi}_t K')] \\
&= \left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[K - (\tilde{\varphi}_t K)] \right) \otimes K' \\
&\quad + \lim_{t\to 0} (\tilde{\varphi}_t K) \otimes \left(\frac{1}{t}[K' - (\tilde{\varphi}_t K')] \right) \\
&= (L_X K) \otimes K' + K \otimes (L_X K').
\end{aligned}
$$

由于 $\tilde{\varphi}_t$ 保型并与缩并运算交换, 所以 L_X 亦如此. 若 f 是 M 上的函数, 那么

$$
(L_X f)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(x) - f(\varphi_t^{-1} x)] = -\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(\varphi_t^{-1} x) - f(x)].
$$

若注意到 $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ 是由 $-X$ 生成的局部单参数变换群, 则会看出 $L_X f = -(-X)f = Xf$. 最后, (e) 是命题 1.9 的重述. 证毕.

我们将用 "$\mathfrak{T}(M)$ 的导子" 这个术语表示 $\mathfrak{T}(M)$ 到其自身的满足命题 3.2 的条件 (a), (b), (c) 的映射.

令 S 是一个 $(1,1)$ 型张量场. 对每个 $x \in M$, S_x 是切空间 $T_x(M)$ 的一个线性自同态. 由命题 2.13, S_x 能唯一地扩张成 $T_x(M)$ 上的张量代数 $\boldsymbol{T}(x)$ 的导子. 对于每个张量场 K, 将 SK 定义为 $(SK)_x = S_x K_x$, $x \in M$. 那么 S 是 $\mathfrak{T}(M)$ 的一个导子. 于是有

命题 3.3 $\mathfrak{T}(M)$ 的每一个导子 D 能唯一地分解成

$$
D = L_X + S,
$$

其中 X 是一个向量场而 S 是一个 $(1,1)$ 型张量场.

证明 因为 D 是保型的, 所以它将 $\mathfrak{F}(M)$ 映入其自身内, 并且对 $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ 满足 $D(fg) = Df \cdot g + f \cdot Dg$. 由此可知有一个向量场 X 使得对每个 $f \in \mathfrak{F}(M)$, $Df = Xf$. 显然 $D - L_X$ 是 $\mathfrak{T}(M)$ 的一个导子并且在 $\mathfrak{F}(M)$ 上为零. 我们将证明在 $\mathfrak{F}(M)$ 上为零的任何导子 D 都是由 (1,1) 型张量场诱导的. 对于任何向量场 Y, DY 也是一个向量场并且对于任何函数 f, $D(fY) = Df \cdot Y + f \cdot DY = f \cdot DY$, 因

为由假设 $Df=0$. 由命题 3.1, 有唯一的 (1,1) 型张量场 S 使得对每个张量场 Y, $DY=SY$. 为证明 D 与由 S 诱导的导子一致, 只要证明下列引理就行了.

引理 若 $\mathfrak{T}(M)$ 的两个导子 D_1 和 D_2 在 $\mathfrak{F}(M)$ 和 $\mathfrak{X}(M)$ 上一致, 那么它们在 $T(M)$ 上一致.

证明 首先注意到一个导子 D 能够局部化, 即如果张量场 K 在一个开集 U 上为零, 那么 DK 在 U 上为零. 实际上, 对于每个 $x\in U$, 令 f 是一个函数使得 $f(x)=0$ 且在 U 外 $f=1$, 那么 $K=f\cdot K$ 且因此有 $DK=Df\cdot K+f\cdot DK$. 由于 K 和 f 在 x 点为零, 因而 DK 亦如此. 由此可知, 若两个张量场 K 和 K' 在 U 上一致, 则 DK 和 DK' 在 U 上一致.

令 $D=D_1-D_2$, 则现在的问题是要证明: 若导子 D 在 $\mathfrak{F}(M)$ 和 $\mathfrak{X}(M)$ 上为零, 那么它在 $\mathfrak{T}(M)$ 上也为零. 令 K 是一个 (r,s) 型张量场而 x 是 M 的任意一点. 为证明 DK 在 x 点为零, 令 V 是 x 的一个坐标邻域并且带有局部坐标系 $x^1,\cdots,x^n$, 再令

$$K=\sum K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}X_{i_1}\otimes\cdots\otimes X_{i_r}\otimes\omega^{j_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{j_s},$$

其中 $X_i=\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $\omega^j=dx^j$. 可以将 $K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$, X_i 和 ω^j 扩张到 M 上并假定这个等式在 x 的一个较小的邻域 U 上成立. 因为 D 可以局部化, 从而只需证明

$$D(K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}X_{i_1}\otimes\cdots\otimes X_{i_r}\otimes\omega^{j_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{j_s})=0.$$

但是若能证明 $D\omega=0$ 对 M 上的每个 1 形式 ω 成立, 那么此等式立即成立. 令 Y 是任何一个向量场而 $C:\mathfrak{T}^1_1(M)\to\mathfrak{F}(M)$ 显然是一个缩并因而 $C(Y\otimes\omega)=\omega(Y)$ 是一个函数 (参看例 2.1). 于是就有

$$0=D(C(Y\otimes\omega))=C(D(Y\otimes\omega))=C(DY\otimes\omega)+C(Y\otimes D\omega)=C(Y\otimes D\omega)=(D\omega)(Y).$$

由于此式对于每个向量场 Y 成立, 因而有 $D\omega=0$. 证毕.

$\mathfrak{T}(M)$ 的所有导子的集合关于自然加法和数乘运算以及由 $[D,D']K=D(D'K)-D'(DK)$ 定义的括号运算构成 $\boldsymbol{R}$ 上的一个 (无穷维的)Lie 代数. 由命题 2.13 可知, 所有 (1,1) 型张量场 S 的集合构成由 $\mathfrak{T}(M)$ 的导子组成的 Lie 代数的一个子代数. 在命题 3.3 的证明中已经证明了 $\mathfrak{T}(M)$ 的一个导子是由 (1,1) 型张量场诱导的当且仅当它在 $\mathfrak{F}(M)$ 上为零. 由此立即得知, 若 D 是 $\mathfrak{T}(M)$ 的一个导子且 S 是一个 $(1,1)$ 型张量场, 那么 $[D,S]$ 在 $\mathfrak{F}(M)$ 上为零, 因而是由一个 (1,1) 型张量场所诱导的. 换句话说, (1,1) 型张量场的集合是 $\mathfrak{T}(M)$ 的导子组成的 Lie 代数的一个理想. 另一方面, Lie 微分 $L_X(X\in\mathfrak{X}(M))$ 的集合构成 $\mathfrak{T}(M)$ 的导子组成的 Lie 代数的一个子代数. 这可从下列命题得出.

命题 3.4 对于任何向量场 X 和 Y 均有

$$L_{[X,Y]}=[L_X,L_Y].$$

证明 根据上面的引理, 只需证明在 $\mathfrak{F}(M)$ 和 $\mathfrak{X}(M)$ 上, $[L_X,L_Y]$ 和 $L_{[X,Y]}$ 有相同的功效. 对 $f\in\mathfrak{F}(M)$ 有

$$[L_X,L_Y]f=XYf-YXf=[X,Y]f=L_{[X,Y]}f.$$

对于 $Z\in\mathfrak{X}(M)$, 由 Jacobi 恒等式得

$$[L_X,L_Y]Z=[X,[Y,Z]]-[Y,[X,Z]]=[[X,Y],Z].\qquad \text{证毕.}$$

命题 3.5 令 K 是一个 $(1,r)$ 型张量场并对它作如同命题 3.1 中的解释. 那么对任何向量场 X 有

$$(L_XK)(Y_1,\cdots,Y_r)=[X,K(Y_1,\cdots,Y_r)]-\sum_{i=1}^{r}K(Y_1,\cdots,[X,Y_i],\cdots,Y_r).$$

证明 设 $C_1,\cdots,C_r$ 都是缩并运算, 则有

$$K(Y_1,\cdots,Y_r)=C_1\cdots C_r(Y_1\otimes\cdots\otimes Y_r\otimes K).$$

利用命题 3.2 的条件 (a) 和 (c), 则对 $\mathfrak{T}(M)$ 的任何导子 D 均有

$$\begin{aligned}D(K(Y_1,\cdots,Y_r))=&(DK)(Y_1,\cdots,Y_r)\\&+\sum_i K(Y_1,\cdots,DY_i,\cdots,Y_r).\end{aligned}$$

若 $D=L_X$, 则命题 3.2 的 (c) 蕴涵命题 3.5. 证毕.

推广推论 1.10, 则得到

命题 3.6 令 φ_t 是由向量场 X 生成的局部单参数变换群, 那么对任何张量场 K 均有

$$\tilde{\varphi}_s(L_XK)=-(d(\tilde{\varphi}_tK)/dt)_{t=s}.$$

证明 由定义

$$L_XK=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[K-\tilde{\varphi}_tK].$$

以 $\tilde{\varphi}_sK$ 代替 K, 则得到

$$L_X(\tilde{\varphi}_sK)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\tilde{\varphi}_sK-\tilde{\varphi}_{t+s}K]=-(d(\tilde{\varphi}_tK)/dt)_{t=s}.$$

因此我们的问题是要证明对所有张量场 K, $\tilde{\varphi}_s(L_X K) = L_X(\tilde{\varphi}_s K)$, 即 $L_X K = \tilde{\varphi}_s^{-1} \circ L_X \circ \tilde{\varphi}_s(K)$. 直接验证可以看出 $\tilde{\varphi}_s^{-1} \circ L_X \circ \tilde{\varphi}_s$ 是 $\mathfrak{T}(M)$ 的一个导子. 由命题 3.3 证明中的引理, 只需证明 L_X 和 $\tilde{\varphi}_s^{-1} \circ L_X \circ \tilde{\varphi}_s$ 在 $\mathfrak{F}(M)$ 和 $\mathfrak{X}(M)$ 上一致. 它们在 $\mathfrak{F}(M)$ 上一致的事实可从下列公式得出 (参看第一章 1.1 节):

$$\varphi^*((\varphi_* X) f) = X(\varphi^* f),$$

$$\tilde{\varphi}^{-1} f = \varphi^* f,$$

此二式对于 M 的任何变换 φ 成立并且从 $(\varphi_s)_* X = X$ 得出 (参看推论 1.8). 证毕.

推论 3.7 对于每个 t, 张量场 K 在 φ_t 作用下不变当且仅当 $L_X K = 0$.

令 $\mathfrak{D}^r(M)$ 是在 M 上定义的 r 次微分形式组成的空间, 即由斜对称的 r 阶协变张量场构成的空间. $\mathfrak{D}(M) = \sum_{r=0}^{n} \mathfrak{D}^r(M)$ 关于外积构成 $\mathbf{R}$ 上的代数. $\mathfrak{D}(M)$ 的导子 (或斜导算子) 是 $\mathfrak{D}(M)$ 到其自身的线性映射 D 并且满足

$$D(\omega \wedge \omega') = D\omega \wedge \omega' + \omega \wedge D\omega', \quad \omega, \omega' \in \mathfrak{D}(M)$$

(相应满足 $D(\omega \wedge \omega') = D\omega \wedge \omega' + (-1)^r \omega \wedge D\omega'$, $\omega \in \mathfrak{D}^r(M)$, $\omega' \in \mathfrak{D}(M)$). 若对于每个 r, $\mathfrak{D}(M)$ 的导子或斜对称导于 D 均将 $\mathfrak{D}^r(M)$ 映射到 $\mathfrak{D}^{r+k}(M)$ 中, 则称之为 k 阶的. 外微分算子 d 是 1 阶斜称导子. 关于 $\mathfrak{D}(M)$ 的导子和斜对称导子的一般结果有下列命题.

命题 3.8 (a) 若 D 和 D' 分别是 k 阶和 k' 阶导子, 那么 $[D, D']$ 是 $k+k'$ 阶的导子.

(b) 若 D 是 k 阶导子而 D' 是 k' 阶斜称导子. 那么 $[D, D']$ 是 $k+k'$ 阶斜称导子.

(c) 若 D 和 D' 分别是 k 阶和 k' 阶斜称导子, 那么 $DD' + D'D$ 是 $k+k'$ 阶导子.

(d) 一个导子或斜称导子完全是由它在 $\mathfrak{D}^0(M) = \mathfrak{F}(M)$ 和 $\mathfrak{D}^1(M)$ 上的作用所决定的.

证明 (a), (b), (c) 的验证是直接的, 而 (d) 的证明则类似于命题 3.3 中引理的证明. 证毕.

命题 3.9 对于每个向量场 X, L_X 是 $\mathfrak{D}(M)$ 的一个 0 阶导子并且与外微分算子 d 交换. 反过来, $\mathfrak{D}(M)$ 的每个与 d 交换的 0 阶导子是关于某个向量场 X 的 L_X.

证明 首先注意到 L_X 与例 3.2 中定义的反对称化算子 A 交换. 这个结论可从下列公式直接得出:

$$(L_X\omega)(Y_1,\cdots,Y_r)=X(\omega(Y_1,\cdots,Y_r))-\sum_i\omega(Y_1,\cdots,[X,Y_i],\cdots,Y_r).$$

这个公式的证明与命题 3.5 的证明相同. 由此 $L_X(\mathfrak{D}(M))\subset\mathfrak{D}(M)$ 并且对任何 ω, $\omega'\in\mathfrak{D}(M)$ 都有

$$\begin{aligned}L_X(\omega\wedge\omega')&=L_X(A(\omega\otimes\omega'))=A(L_X(\omega\otimes\omega'))\\&=A(L_X\omega\otimes\omega')+A(\omega\otimes L_X\omega')\\&=L_X\omega\wedge\omega'+\omega\wedge L_X\omega'.\end{aligned}$$

为了证明 L_X 与 d 交换, 首先注意到对于 M 的任何变换 φ, $\tilde{\varphi}\omega=(\varphi^{-1})^*\omega$, 因此 $\tilde{\varphi}$ 与 d 交换. 令 φ_t 是由 X 生成的局部单参数变换群. 从 $\tilde{\varphi}_t(d\omega)=d(\tilde{\varphi}_t\omega)$ 和 $L_X\omega$ 的定义得知对于每个 $\omega\in\mathfrak{D}(M)$, $L_X(d\omega)=d(L_X\omega)$. 反过来, 令 D 是 $\mathfrak{D}(M)$ 的一个与 d 交换的 0 阶导子. 因为 D 将 $\mathfrak{D}^0(M)=\mathfrak{F}(M)$ 映入其自身, 所以 D 是 $\mathfrak{F}(M)$ 的一个导子并且存在一个向量场 X 使得对每个 $f\in\mathfrak{F}(M)$, $Df=Xf$. 令 $D'=D-L_X$, 那么 D' 是 $\mathfrak{D}(M)$ 的一个导子并且使得对每个 $f\in\mathfrak{F}(M)$, $D'f=0$. 根据命题 3.8(d), 为了证明 $D'=0$, 只需证明对每个 1 形式 ω, $D'\omega=0$. 恰如在命题 3.3 的引理中那样, D' 可以局部化而且只需证明当 ω 具有 fdg(其中 $f,g\in\mathfrak{F}(M)$) 的形式时, $D'\omega=0$ 即可, (因为 ω 关于局部坐标系 $x^1,\cdots,x^n$, 局部地具有 $\sum f_idx^i$ 的形式.) 令 $\omega=fdg$. 从 $D'f=0$ 和 $D'(dg)=d(D'g)=0$ 得

$$D'(\omega)=(D'f)dg+f\cdot D'(dg)=0.\qquad \text{证毕.}$$

对每个向量场 X, 定义 $\mathfrak{D}(M)$ 的一个 -1 阶斜对称导子 l_X, 称为关于 X 的内乘, 使得

(a) 对每个 $f\in\mathfrak{D}^0(M)$, $l_Xf=0$;

(b) 对每个 $\omega\in\mathfrak{D}^1(M)$, $l_X\omega=\omega(X)$.

由命题 3.8(d), 这样的斜对称导子如果存在则它是唯一的. 为证明其存在性, 对于每一个 r 考虑缩并运算 $C:\mathfrak{T}^1_r(M)\to\mathfrak{T}^0_{r-1}(M)$. 把每 r 形式 ω 看成 $\mathfrak{T}^0_r(M)$ 的元素并且定义 $l_X\omega=C(X\otimes\omega)$. 换句话说, 对于 $Y_i\in\mathfrak{X}(M)$,

$$(l_X\omega)(Y_1,\cdots,Y_{r-1})=r\cdot\omega(X,Y_1,\cdots,Y_{r-1}).$$

把验证这样定义的 i_X 是 $\mathfrak{D}(M)$ 的斜对称导子的工作留给读者.

$$l_X(\omega\wedge\omega')=l_X\omega\wedge\omega'+(-1)^r\omega\wedge l_X\omega',\ \text{其中}\ \omega\in\mathfrak{D}^r(M),\omega'\in\mathfrak{D}^s(M),$$

容易从下列公式得出:

$$(\omega\wedge\omega')(Y_1,\cdots,Y_{r+s})=\frac{1}{(r+s)!}\sum\varepsilon(j;k)\omega(Y_{j_1},\cdots,Y_{j_r})\omega'(Y_{k_1},\cdots,Y_{k_s}),$$

其中求和运算是对所有把 $(1,\cdots,r+s)$ 变成 $(j_1,\cdots,j_r)$ 和 $(k_1,\cdots,k_s)$ 的置换来进行的, 而 $\varepsilon(j;k)$ 代表置换 $(1,\cdots,r+s)\to(j_1,\cdots,j_r,k_1,\cdots,k_s)$ 的符号.

因为 $(l_X^2\omega)(Y_1,\cdots,Y_{r-2})=r(r-1)\cdot\omega(X,X,Y_1,\cdots,Y_{r-2})=0$, 所以有

$$l_X^2=0.$$

对于 d, L_X 和 l_X 之间的关系, 我们有

命题 3.10 (a) 对于每个向量场 X, $L_X=d\circ l_X+l_X\circ d$.

(b) 对于任何向量场 X 和 Y, $[L_X,l_X]=l_{[X,Y]}$.

证明 由命题 3.8(c), $d\circ l_X+l_X\circ d$ 是一个 0 阶导子. 它与 d 可交换是因为 $d^2=0$. 由命题 3.9. 它等于关于某个向量场的 Lie 微分. 为证明它实际上等于 L_X, 只需证明对于每个函数 f 都有 $L_Xf=(d\circ l_X+l_X\circ d)f$. 但这是明显的, 因为 $L_Xf=Xf$ 并且 $(d\circ l_X+l_X\circ d)f=l_X(df)=(df)(X)=Xf$. 为证明第二个论断 (b), 首先注意到 $[L_X,l_Y]$ 是一个 -1 阶斜对称导子并且在 $\mathfrak{F}(M)$ 上 $[L_X,l_Y]$ 和 $l_{[X,Y]}$ 都为零. 由命题 3.8(d), 只需证明它们在每个 1 形式 ω 上作用相同. 正如我们在命题 3.9 的证明中所指出的, $(L_X\omega)(Y)=X(\omega(Y))-\omega([X,Y])$, 此式可用与命题 3.5 同样的方式证明. 从而

$$\begin{aligned}[L_X,l_Y]\omega&=L_X(\omega(Y))-l_Y(L_X\omega)=X(\omega(Y))-(L_X\omega)(Y)\\&=\omega([X,Y])=l_{[X,Y]^\omega}.\quad\text{证毕.}\end{aligned}$$

作为命题 3.10 的应用我们来证明

命题 3.11 若 ω 是一个 r 形式, 那么

$$\begin{aligned}(d\omega)(X_0,X_1,\cdots,X_r)=&\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}(-1)^rX_i(\omega(X_0,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_r)\\&+\frac{1}{r+1}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant r}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_r),\end{aligned}$$

其中符号 $\wedge$ 表示略去所标记的字母. ($r=1,2$ 的情形特别有用.) 若 ω 是个 1 形式, 那么

$$(d\omega)(X,Y)=\frac{1}{2}\{X(\omega(Y))-Y(\omega(X))-\omega([X,Y])\},\quad X,Y\in\mathfrak{X}(M).$$

若 ω 是一个 2 形式, 那么

$$\begin{aligned}(d\omega)(X,Y,Z)=&\frac{1}{3}\{X(\omega(Y,Z))+Y(\omega(Z,X))+Z(\omega(X,Y))\\&-\omega([X,Y],Z)-\omega([Y,Z],X)-\omega([Z,X],Y)\},\end{aligned}$$

$$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

证明 对 r 用归纳法进行. 若 $r=0$, 那么 ω 是一个函数并且 $d\omega(X_0)=X_0\omega$, 这证明上面的公式对 $r=0$ 成立. 假设公式对 $r-1$ 成立. 令 ω 是一个 r 形式, 为了简化记号置 $X=X_0$. 由命题 3.10 的 (a) 款,

$$\begin{aligned}(r+1)d\omega(X, X_1, \cdots, X_r) &= (l_X \circ d\omega)(X_1, \cdots, X_r)\\ &= (L_X\omega)(X_1, \cdots, X_r) - (d \circ l_X\omega)(X_1, \cdots, X_r).\end{aligned}$$

正如在命题 3.9 的证明中所指出的,

$$\begin{aligned}(L_X\omega)(X_1, \cdots, X_r) =& X(\omega(X_1, \cdots, X_r))\\ &- \sum_{i=1}^{r}\omega(X_1, \cdots, [X, X_i], \cdots, X_r).\end{aligned}$$

因为 $l_X\omega$ 是一个 $(r-1)$ 形式, 所以由归纳假设得

$$\begin{aligned}(d \circ l_X\omega)(X_1, \cdots, X_r) =& \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(-1)^{r-1}X_i(l_X\omega(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_r))\\ &+ \frac{1}{r}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant r}(-1)^{i+j}(l_X\omega)([X_i, X_j], X_1, \cdots, \hat{X}_i \cdots \hat{X}_j, \cdots, X_r)\\ =& \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}X_i(\omega(X, X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_r))\\ &- \frac{1}{r}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant r}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X, X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_r).\end{aligned}$$

从这三个公式立即得出命题的结论. 证毕.

评注 命题 3.11 中的各公式对于向量空间值的形式仍然成立.

各种导算子使得我们能够从给定的张量场来构造新的张量场. 我们将以给出构造新张量场的另一种方法来结束本节.

命题 3.12 令 A 和 B 都是 (1,1) 型张量场, 置

$$\begin{aligned}S(X, Y) =& [AX, BY] + [BX, AY] + AB[X, Y] + BA[X, Y]\\ &- A[X, BY] - A[BX, Y] - B[X, AY] - B[AX, Y],\end{aligned}$$

$$X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

映射 $S: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ 是一个 (1,2) 型张量场并且 $S(X, Y) = -S(Y, X)$.

证明　由直接演算可以看出 S 是一个从 $\mathfrak{F}(M)$ 模 $\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)$ 到 $\mathfrak{F}$ 模 $\mathfrak{X}(M)$ 的双线性映射. 由命题 3.1, S 是一个 (1,2) 型张量场. 验证 $S(X,Y)=-S(Y,X)$ 是容易的. 证毕.

我们把 S 称为 A 和 B 的挠率. 关于 S 的构造可以从文献 Nijenhuis[1] 中找到.

1.4　Lie　群

一个 Lie 群不仅是一个群而且同时还是一个微分流形并使得群运算 $(a,b)\in G\times G\to ab^{-1}\in G$ 是从 $G\times G$ 到 G 的可微映射. 因为 G 是局部连通的, 所以它的单位连通分支 (记为 G^0) 是 G 的一个开子群. G^0 是由单位元 e 的任何邻域生成的. 特别, 它是至多可数个紧集的和并且满足第二可数公理. 由此可知 G 满足第二可数公理当且仅当商群 G/G^0 由至多可数个元素组成.

我们用 L_a(相应地用 R_a) 表示由元素 $a\in G$ 所产生的 G 的左 (右) 平移: 对每个 $x\in G$, $L_ax=ax(R_ax=xa)$; 对于 $a\in G$, 用 ad a 表示对每个 $x\in G$ 由 $(\mathrm{ad}\ a)x=axa^{-1}$ 定义的 G 的内自同构.

若 G 上的向量场 X 是在所有左平移 L_a(右平移 R_a)$(a\in G)$ 作用下不变的, 则称该向量场是左 (右) 不变的. 一个左 (或右) 不变的向量场总是可微的. G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 定义为 G 上所有左不变向量场的集合并且赋予了通常的加法、数乘以及括号运算. 作为一个向量空间, $\mathfrak{g}$ 同构于单位元处的切空间 $T_e(G)$. 这个同构是由将 $X\in\mathfrak{g}$ 映为 $X_e(X$ 在 e 点的值) 的映射给出的. 因而 $\mathfrak{g}$ 是向量场构成的 Lie 代数 $X(G)$ 的一个 $n(n=\dim G)$ 维 Lie 子代数.

每一个 $A\in\mathfrak{g}$ 生成 G 的一个 (整体) 单参数变换群. 实际上, 如果 φ_t 是由 A 生成的局部单参数变换群并且 φ_te 对 $|t|<\varepsilon$ 有定义, 那么对于每个 a, 可以对 $|t|<\varepsilon$ 定义 φ_ta, 而且等于 $L_a(\varphi_te)$, 这是因为由推论 1.8, φ_t 与每一个 L_a 交换. 因为对于每个 $a\in G$, φ_ta 对 $|t|<\varepsilon$ 有定义, 所以对每个 a, φ_ta 对 $|t|<\infty$ 有定义. 置 $a_t=\varphi_te$, 那么对所有 $t,s\in\mathbf{R}$, $a_{t+s}=a_ta_s$. a_t 称为由 A 生成的 G 的单参数子群. a_t 的另一种描述是: 它是 G 中唯一的一条使得它在 a_t 的切向量 $\dot{a}_t$ 等于 La_tA_e 并且 $a_0=e$ 的曲线. 换句话说, 它是满足初始条件 $a_0=e$ 的微分方程 $a_t^{-1}\dot{a}_t=A_e$ 的唯一解. 将 $a_1=\varphi_1e$ 记为 $\exp A$, 那么由此可得对所有 t, $\exp tA=a_t$. 从 $\mathfrak{g}$ 到 G 中的映射 $A\to\exp A$ 称为指数映射.

例 4.1　$GL(n;\mathbf{R})$ 和 $\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})$. 令 $GL(n;\mathbf{R})$ 是所有 $n\times n$ 非奇异矩阵 $A=(a_j^i)$(它的第 i 行、第 j 列的元素是 a_j^i 的矩阵) 组成的群. 对于 $A=(a_j^i)$ 和 $B=(b_j^i)$, 它们的乘积为

$$(AB)_j^i=\sum_{k=1}^n a_k^ib_j^k.$$

$GL(n;\mathbf{R})$ 可以看作一个开子集, 因而可以看成 $\mathbf{R}^{n^2}$ 的开子流形. $GL(n;\mathbf{R})$ 关于这个可微结构成为一个 Lie 群. 它的单位分支由行列式为正值的矩阵组成. 所有 $n\times n$ 实矩阵的集合 $\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})$ 关于由 $[A,B]=AB-BA$ 定义的括号运算形成一个 n^2 维的 Lie 代数. 人们已经知道 $GL(n;\mathbf{R})$ 的 Lie 代数可等同于 $\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})$ 并且指数映射 $\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})\to GL(n;\mathbf{R})$ 与通常的指数映射 $\exp A=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{A^k}{k!}$ 一致.

例 4.2 $O(n)$ 和 $\mathfrak{o}(n)$. 所有 $n\times n$ 正交矩阵组成的群 $O(n)$ 是一个紧 Lie 群, 它的由行列式为 1 的成员组成的单位分支记为 $SO(n)$. 所有 $n\times n$ 斜对称矩阵构成的 Lie 代数 $\mathfrak{o}(n)$ 可等同于 $O(n)$ 的 Lie 代数并且指数映射 $\mathfrak{o}(n)\to O(n)$ 是通常的指数映射. $O(n)$ 的维数等于 $n(n-1)/2$.

凡是提到 Lie 群 G 的一个 Lie 子群时总是指这样一个子群 H, 它同时也是 G 的一个子流形使得 H 本身关于这个可微结构成为一个 Lie 群. H 上的左不变向量场是由它在 e 点的值所决定的而且 H 在 e 点的这个切向量决定 G 上的一个左不变向量场. 由此可知, H 的 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ 可等同于 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数. 反过来, $\mathfrak{g}$ 的每个子代数 $\mathfrak{h}$ 是 G 的唯一一个连通 Lie 子群 H 的 Lie 代数. 这一点可粗略证明如下. 对 G 的每一点 x 指派由所有 $A_x(A\in\mathfrak{h})$ 组成的空间, 那么这是一个对合分布并且这个分布过 e 点的极大积分流形就是所要求的群 (参看 Chevalley[1, p.109, 定理 1]).

于是, 在 G 的连通 Lie 子群和 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的 Lie 子代数之间存在一个一一对应. 下面对非连通 Lie 子群作几点说明. 令 H 是 Lie 群 G 的任意一个子群, 通过假定 H 带有离散拓扑可以将 H 看作 G 的 0 维 Lie 子群. 这也意味着 G 的一个子群 H 可以用多种不同的方式 (即对于不同的可微结构) 将它看作 G 的 Lie 子群. 为了消除这种情况可将条件加强为 H/H^0 是可数的, 其中 H^0 关于它自身的拓扑是 H 的单位分支; 或者换句话说, H 满足第二可数公理. (G 的一个带离散拓扑的子群, 仅当它为可数时才是一个 Lie 子群.) 在此条件下便有 Lie 子群结构按下述意义的唯一性. 令 H 为 Lie 群 G 的一个子群. 假设 H 有两个微分结构, 分别记为 H_1 和 H_2, 使它成为 G 的 Lie 子群. 如果 H_1 和 H_2 都满足第二可数公理, 那么 H 到其自身的恒等映射是从 H_1 到 H_2 的微分同胚. 考虑恒等映射 $f:H_1\to H_2$. 因为 H_2 的单位分支是由 H_2 的 Lie 代数定义的分布的极大积分流形, 所以由命题 1.3, $f:H_1\to H_2$ 是可微的. 类似地, $f^{-1}:H_2\to H_1$ 也是可微的.

Lie 群 G 的每一个自同构 φ 诱导其 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构 φ_*, 实际上, 若 $A\in\mathfrak{g}$, 那么 φ_*A 也是一个左不变向量场而且对于 $A,B\in\mathfrak{g},\varphi_*[A,B]=[\varphi_*A,\varphi_*B]$. 特别对于每个 $a\in G$, 将 x 映射成 axa^{-1} 的 ad a 诱导 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构, 仍然记为 ad a. 我们把 G 的表示 $a\to$ ad a 称为 G 在 $\mathfrak{g}$ 中的伴随表示. 对于每一个 $a\in G$ 和 $A\in\mathfrak{g}$, 均有 $(\text{ad a})A=(R_{a^{-1}})_*A$, 这是因为 $axa^{-1}=L_aR_{a^{-1}}x=R_{a^{-1}}L_ax$

并且 A 是左不变的. 令 $A, B \in \mathfrak{g}$ 且 φ_t 是由 A 生成的 G 的单参数变换群. 令 $a_t = \exp tA = \varphi_t(e)$. 那么对于 $x \in G$, $\varphi_t(x) = xa_t$. 由命题 1.9,

$$[B, A] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[(\varphi_t)_* B - B] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[(R_{a_t})_* B - B]$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\mathrm{ad}(a_t^{-1})B - B].$$

由此可知, 若 H 是 G 的不变 Lie 子群, 那么它的 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 即 $A \in \mathfrak{g}$ 和 $B \in \mathfrak{h}$ 蕴涵着 $[B, A] \in \mathfrak{h}$. 反过来, 由 $\mathfrak{g}$ 的一个理想. $\mathfrak{h}$ 生成的连通 Lie 子群 H 是 G 的不变子群.

若 G 上的一个微分形式 ω 对于每个 $a \in G$, 都有 $(L_a)^*\omega = \omega$, 则称之为左不变的. 所有左不变 1 形式构成的向量空间 $\mathfrak{g}^*$ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间: 若 $A \in \mathfrak{g}, \omega \in \mathfrak{g}^*$, 那么函数 $\omega(A)$ 在 G 上为常数. 若 ω 是左不变形式, 那么 $d\omega$ 也是, 因为外微分运算 d 与 φ^* 交换. 从命题 3.1 得到 Maurer-Cartan 方程:

$$d\omega(A, B) = -\frac{1}{2}\omega([A, B]), \quad \omega \in \mathfrak{g}^*, \quad A, B \in \mathfrak{g}.$$

G 上的标准 1 形式是由

$$\theta(A) = A, \quad A \in \mathfrak{g}$$

唯一决定的左不变 $\mathfrak{g}$ 值 1 形式. 令 $E_1, \cdots, E_r$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个基并且置

$$\theta = \sum_{i=1}^{r} \theta^i E_i.$$

那么 $\theta^1, \cdots, \theta^r$ 构成由 G 上的左不变实 1 形式组成的空间的一个基, 置

$$[E_j, E_k] = \sum_{i=1}^{r} c^i_{jk} E_i,$$

其中的各 c^i_{jk} 称为 $\mathfrak{g}$ 关于基 $E_1, \cdots, E_r$ 的结构常数. 容易验证, Maurer-Cartan 方程由下式给出:

$$d\theta^i = -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{r} c^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k, \quad i = 1, \cdots, r.$$

现在我们来考虑 Lie 氏变换群. 一个 Lie 群 G 若满足下列条件, 则称它是流形 M 上的 Lie 变换群. 或者说 G(可微地) 作用在 M 上:

(1) G 的每个元素 a 诱导 M 的一个变换, 记为 $x \to xa$, 其中 $x \in M$;

(2) $(a, x) \in G \times M \to xa \in M$ 是可微映射;

(3) $x(ab) = (xa)b$ 对所有 $a, b \in G$ 和 $x \in M$ 成立.

对于 xa 也写成 $R_a x$ 并且称为 G 右作用在 M 上. 若写成 ax 并假设以 $(ab)x = a(bx)$ 代替条件 (3), 则称为 G 左作用在 M 上并将 ax 记为 $L_a x$. 注意到 $R_{ab} = R_b \circ R_a$ 和 $L_{ab} = L_a \circ L_b$, 从条件 (3) 及每个 R_a 或 L_a 在 M 上是一一的可知, R_e 和 L_e 是 M 上的恒等变换.

若 $R_a x = x$ 对所有 $x \in M$(或对某个 $x \in M$) 成立蕴涵着 $a = e$, 则称 G 是有效地 (自由地) 作用在 M 上.

若 G 右作用在 M 上, 那么可对每个元素 $A \in \mathfrak{g}$ 指派 M 上的一个向量场 A^* 如下. 单参数子群 $a_t = \exp tA$ 在 M 上的作用诱导 M 上的一个向量场, 记为 A^*(参看 1.1 节).

命题 4.1 令 Lie 群 G 右作用在 M 上, 将 A 映为 A^* 的映射 $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ 是一个 Lie 代数的同态. 如果 G 有效作用在 M 上, 那么 σ 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{X}(M)$ 的同构; 若 G 自由地作用在 M 上, 那么对于每个非零的 $A \in \mathfrak{g}$, $\sigma(A)$ 在 M 上不为零.

证明 首先注意到 σ 还可以用下列方式来定义. 对于每个 $x \in M$, 令 σ_x 是映射 $a \to G \to xa \in M$. 那么 $(\sigma_x)_* A_e = (\sigma A)_x$. 由此可知 σ 是从 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{X}(M)$ 的线性映射. 为证明 σ 与括号运算交换, 令 $A, B \in \mathfrak{g}$, $A^* = \sigma A$, $B^* = \sigma B$, $a_t = \exp tA$. 由命题 1.9 得

$$[A^*, B^*] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[B^* - R_{a_t} B^*].$$

从 $R_{a_t} \circ \sigma_x a_t^{-1}(c) = x a_t^{-1} c a_t (c \in G)$ 这一事实得到 (用同一字母表示一个映射的微分)

$$(R_{a_t} B^*)_x = R_{a_t} \circ \sigma_{x a_t^{-1}} \circ B_e = \sigma_x(\mathrm{ad}(a_t^{-1}) B_e),$$

因此根据 $\mathfrak{g}$ 中用 adG 表达的 $[A, B]$ 的公式

$$\begin{aligned}
[A^*, B^*] &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\sigma_x B_e - \sigma_x(\mathrm{ad}(a_t^{-1}) B_e] \\
&= \sigma_x \left(\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[B_e - \mathrm{ad}(a_t^{-1}) B_e] \right) \\
&= \sigma_x([A, B]_e) = (\sigma[A, B])_x.
\end{aligned}$$

这就证明了 σ 是从 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 到 Lie 代数 $\mathfrak{X}(M)$ 的同态. 假设 $\sigma A = 0$ 在 M 上处处成立. 这意味着单参数变换群 R_{a_t} 是平凡的, 即对每个 t, R_{a_t} 都是 M 上的恒等变换. 如果 G 在 M 上的作用是有效的, 那么这就蕴涵着对每个 t, $a_t = e$, 因此 $A = 0$. 为证明命题中最后一个论断, 假设 σA 在 M 的某一点 x 处为零, 那么对于每个 t, R_{a_t} 使 x 点固定不变. 若 G 自由地作用在 M 上, 那么这就蕴涵着对于每个 t, $a_t = e$, 因此 $A = 0$. 证毕.

虽然我们曾把 Lie 群定义为这样一个群, 它同时还是一个可微流形使得群运算 $(a, b) \to ab^{-1}$ 是可微的, 但是由于下列原因我们也可以用实解析性代替可微性而不

失一般性. 代数映射在 $\mathfrak{g}$ 的原点附近是一一的, 即有 0 在 $\mathfrak{g}$ 中的一个开邻域 N 使得 exp 是从 N 到 e 在 G 中的一个开邻域 U 上的微分同胚 (参看 Chevalley [1; p.118] 或 Pontrjagin [1; §39]). 考虑 G 的这样一个卡集, 它是由坐标卡 $(U_a, \varphi_a)(a \in G)$ 组成的, 其中 $\varphi_a : Ua \to N$ 是 $R_a \circ \exp : N \to Ua$ 的逆映射. (这里 Ua 表示 $R_a(U)$, 并且由 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathbf{R}^n$ 的等同关系, N 可以看作 $\mathbf{R}^n$ 的开集.) G 关于这个卡集是一个实解析流形而且群运算 $(a, b) \to ab^{-1}$ 是实解析的 (参看 Pontrjagin [1; p.257]). 后面我们将需要下列命题.

命题 4.2 令 G 是一个 Lie 群且 H 是 G 的一个闭子群. 那么 G/H 允许以下列方式有一个实解析流形的结构: G 在 G/H 上的作用是实解析的, 即把 (a, bH) 映为 abH 的映射 $G \times G/H \to G/H$ 是实解析的. 特别地, 映射 $G \to G/H$ 是实解析的.

本命题的证明见 Chevalley [1; pp.109-111].

还存在另一类重要的商空间. 令 G 跟同胚群一样是一个右作用在拓扑空间 M 上的抽象群. 若 G 的作用满足下列条件, 则称之为真不连续的:

(1) 若 M 的两点 x 和 x' 模 G 不同余 (即对每个 $a \in G$, $R_a x \neq x'$), 那么 x 和 x' 分别有邻域 U 和 U' 使得对所有 $a \in G$, $R_a(U \cap U')$ 都是空集;

(2) 对于每个 $x \in G$, 迷向群 $G_x = \{a \in G; R_a x = x\}$ 是有限的;

(3) 每个 $x \in M$ 都有一个邻域 U (它在 G_x 作用下是稳定的) 使得对于每个不包含在 G_x 中的 $a \in G$, $U \cap R_a(U)$ 均为空集.

条件 (1) 蕴涵着商空间 M/G 是 Hausdorff 空间. 若 G 的作用是自由的, 那么条件 (2) 自动满足.

命题 4.3 令 G 是一个自由作用在可微 (实解析) 流形 M 上的真不连续的可微 (实解析) 变换群, 那么商空间 M/G 有一个可微 (实解析) 流形结构使得投影 $\pi : M \to M/G$ 是可微 (实解析) 的.

证明 条件 (3) 蕴涵着 M/G 的每一点都有一个邻域 V 使得 π 是 $\pi^{-1}(V)$ 的每个连通分支到 V 的同胚. 令 U 是 $\pi^{-1}(V)$ 的一个连通分支, 选取 V 充分小, 则可以假定流形 M 有一个容许坐标卡 (U, φ), 其中 $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$. 通过取 (V, ψ)(其中 ψ 是 $\pi^{-1} : V \to U$ 和 φ 的复合) 作为容许坐标卡而在 M/G 中引进一个可微 (实解析) 结构. 将细节验证留给读者. 证毕.

评注 可以用同样的方法证明在复解析情况下类似于命题 4.3 的结果.

为了给出真不连续群的有用判据, 先定义一个较弱的不连续群的概念. 若一个抽象群 G 作用在拓扑空间 M 上, 且对每个 $x \in M$ 和 G 的元素的每一个序列 $\{a_n\}$(其中 a_n 都是互不相同的), 相应的序列 $\{R_{a_n} x\}$ 均不收敛于 M 中的一点, 则称 G 是不连续的.

命题 4.4 度量空间 M 的每一个不连续的等距变换群 G 都是真不连续的.

证明 首先注意到对每个 $x \in M$, 轨道 $xG = \{R_a x; a \in G\}$ 在 M 中是闭的. 给定轨道 xG 之外的一点 x', 令 r 是一个正数使得 $2r$ 小于 x' 与轨道 xG 之间的距离. 令 U 和 U' 分别是中心在 x 和 x' 半径为 r 的开球, 那么对所有 $a \in G$, $R_a(U) \cap U'$ 都是空的, 因而证明了条件 (1) 成立. 一个不连续的作用总是满足条件 (2). 为证明 (3), 对于每个 $x \in M$, 令 r 是一个正数使得 $2r$ 小于 x 与闭集 $xG - \{x\}$ 之间的距离. 只需取半径为 r 中心在 x 的开球作为 U 就行了. 证毕.

令 G 是一个拓扑群且 H 是 G 的一个闭子群, 那么 G 从而 G 的任何子群均左作用在商空间 G/H 上.

命题 4.5 令 G 是一个拓扑群且 H 是 G 的一个紧子群, 那么 G 的每个离散子群 D 在 G/H 上的 (左) 作用都是不连续的.

证明 假设 D 的作用不是不连续的. 令 x 和 y 是 G/H 的点而 $\{d_n\}$ 是 D 的不同元素组成的序列使得 $d_n x$ 收敛于 y. 令 $p: G \to G/H$ 是投影映射并且写成 $x = p(a)$ 和 $y = p(b)$, 其中 $a, b \in G$. 令 V 是 G 的单位元 e 的一个邻域并使得 $bVVV^{-1}V^{-1}b^{-1}$ 不包含 D 的除 e 之外的任何其他元素. 因为 $p(bV)$ 是 y 的一个邻域, 所以存在一个整数 N 使得对所有 $n > N$, $d_n x \in p(bV)$. 因而对于 $n > N$, $d_n aH = p^{-1}(d_n x) \subset p^{-1}(p(bV)) = bVH$. 对每个 $n > N$, 存在 $v_n \in V$ 和 $h_n \in H$ 使得 $d_n a = bv_n h_n$. 由于 H 是紧的, 因而可以假设 (必要时通过取一个子序列)h_n 收敛于一个元素 $h \in H$, 从而对 $n > N$, $h_n = u_n h$, 其中 $u_n \in V$. 因此对 $n > N$ 有 $d_n = bv_n u_n ha^{-1}$. 反之, 若 $i, j > N$, $d_i d_j^{-1}$ 在 $bVVV^{-1}V^{-1}b^{-1}$ 中. 这意味着若 $i, j < N$, 则 $d_i = d_j$, 但这与假设矛盾. 证毕.

在将 Lie 变换群理论应用于微分几何时, 重要的是证明流形的一个给定可微变换群能够通过在其中引入一个适当的可微结构而使之成为一个 Lie 变换群. 对于下列定理的证明请读者去查阅 Montgomery-Zippin [1; p.208 和 p.212].

定理 4.6 令 G 是连通 $C^k (1 \leqslant k \leqslant \omega)$ 流形 M 的一个局部紧的有效变换群, 并且 G 的每个变换是 C^1 的. 那么 G 是一个 Lie 群并且映射 $G \times M \to M$ 是 C^k 的.

我们将证明下列结果, 它本质上归功于 van Dantzig 和 van der Waerden [1].

定理 4.7 一个连通局部紧度量空间 M 的等距变换群 G 关于紧开拓扑是局部紧的.

证明 回想到 G 的紧开拓扑定义如下. 对 M 的紧子集 K_i 和开子集 U_i 组成的任何有限个集对 (K_i, U_i), 令 $W = W(K_1, \cdots, K_s; U_1, \cdots, U_s) = \{\varphi \in G; \varphi(K_i) \subset U_i, i = 1, \cdots, s\}$. 那么具有这种形式的集合 W 可以取作 G 的开集的基. 因为 M 是正则的和局部紧的, 所以群的乘法 $G \times G \to G$ 和群在 M 上的作用 $G \times M \to M$ 都是连续的 (参看 Steenrod [1; p.19]). 将 φ 映为 φ^{-1} 的映射 $G \to G$ 的连续性将要利用定理 4.7 中的假设来证明, 尽管它也能从一个较弱的假设得出 (参看 Arens[1]).

每个连通局部紧的度量空间满足第二可数公理 (参看附录 2). 因为 M 是局部紧的而且满足第二可数公理, 所以 G 满足第二可数公理. 这说明序列在证明 G 的局部紧性中的作用 (参看 Kelley [1; p.138]). 我们将把证明分解为几个引理.

引理 1 令 $a \in M$, 令 $\varepsilon > 0$ 使得 $U(a;\varepsilon) = \{x \in M; d(a,x) < \varepsilon\}$ 有紧闭包 (其中 d 是距离). 以 V_a 表示 a 的开邻域 $U(a;\varepsilon/4)$. 令 φ_n 为一个等距变换序列且使得对某一点 $b \in V_a, \varphi_n(b)$ 收敛. 那么存在一个紧集 K 和一个整数 N 使得对于每个 $n > N, \varphi_n(V_a) \subset K$.

证明 选取 N 使得 $n > N$ 蕴涵 $d(\varphi_n(b), \varphi_N(b)) < \varepsilon/4$. 若 $x \in V_a$ 且 $n > N$, 那么利用 φ_n 和 φ_N 都是等距变换的事实则有

$$\begin{aligned} d(\varphi_n(x), \varphi_N(a)) &\leqslant d(\varphi_n(x), \varphi_n(b)) + d(\varphi_n(b), \varphi_N(b)) + d(\varphi_N(b), \varphi_N(a)) \\ &= d(x,b) + d(\varphi_n(b), \varphi_N(b)) + d(b,a) < \varepsilon. \end{aligned}$$

这意味着 $\varphi_n(V_a)$ 包含在 $U(\varphi_N(a);\varepsilon)$ 中. 但因 φ_N 是等距变换, 所以 $U(\varphi_N(a);\varepsilon) = \varphi_N(U(a;\varepsilon))$. 因而 $U(\varphi_N(a);\varepsilon) = \varphi_N(U(a;\varepsilon))$ 的闭包 K 是紧的而且对于 $n > N$, $\varphi_n(V_a) \subset K$.

引理 2 按照引理 1 的记号, 仍然设对于某个 $b \in V_a$, $\varphi_n(b)$ 收敛. 那么 φ_n 有一个子序列 φ_{n_k} 使得 $\varphi_{n_k}(x)$ 对于每个 $x \in V_a$ 都收敛.

证明 令 $\{b_n\}$ 是一个在 V_a 中稠密的可数集. (这样的 $\{b_n\}$ 存在是因为 M 是可分的.) 由引理 1, 存在一个 N 使得对于 $n > N$, $\varphi_n(V_a)$ 在 K 中. 特别 $\varphi_n(b_1)$ 在 K 中. 选取一个子序列 $\varphi_{1,k}$ 使得 $\varphi_{1,k}(b_1)$ 收敛. 再从这个子序列中选取一个子序列 $\varphi_{2,k}$ 使得 $\varphi_{2,k}(b_2)$ 收敛, 如此继续下去. 那么对于每个 $n = 1, 2, \cdots$, 对角线序列 $\varphi_{k,k}(b_n)$ 都收敛. 为证明对于每个 $x \in V_a, \varphi_{k,k}(x)$ 收敛, 我们改变记号并且可以假设 $\varphi_n(b_i)$ 对于每个 $i = 1, 2, \cdots$ 都收敛. 令 $x \in V_a$ 和 $\delta > 0$. 选取 b_i 使得 $d(x, b_i) < \delta/4$. 存在一个 N_1 使得对于 $n, m > N_1$, $d(\varphi_n(b_i), \varphi_m(b_i)) < \delta/4$. 那么就有

$$\begin{aligned} d(\varphi_n(x), \varphi_m(x)) &\leqslant d(\varphi_n(x), \varphi_n(b_i)) + d(\varphi_n(b_i), \varphi_m(b_i)) + d(\varphi_m(b_i), \varphi_m(x)) \\ &= 2d(x, b_i) + d(\varphi_n(b_i), \varphi_m(b_i)) < \delta. \end{aligned}$$

因而 $\varphi_n(x)$ 是一个 Cauchy 序列. 另一方面. 引理 1 说明对所有 $n > N$, $\varphi_n(x)$ 在一个紧集 k 中, 因而 $\varphi_n(x)$ 收敛.

引理 3 令 φ_n 是一个等距变换序列且使得 $\varphi_n(a)$ 对于某一点 $a \in M$ 收敛. 那么存在一个子序列 φ_{n_k} 使得 $\varphi_{n_k}(x)$ 对于每个 $x \in M$ 都收敛. (在这里 M 的连通性起着根本作用.)

证明 对每个 $x \in M$, 令 $V_x = U(x;\varepsilon/4)$ 使得 $U(x;\varepsilon)$ 有紧闭包 (该 ε 可能随着点的改变而改变, 但对于每个 x 都可选取这样一个 ε). 我们将链定义为开集 V_i

的一个有限序列使得: (1) 每个 V_i 均对于某个 x 具有 V_x 的形式; (2) V_1 包含 a; (3) V_i 和 V_{i+1} 有公共点. 可以断言 M 的每一点 y 均在某个链的最后一项中. 实际上容易看出, 这种点 y 的集合是既开又闭的. 由于 M 是连通的, 所以这个集合与 M 一致.

要说明这一点, 选取一个在 M 中稠密的可数集 $\{b_i\}$. 对于 b_1, 令 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 是一个链且满足 $b_1 \in V_s$. 由假设 $\varphi_n(a)$ 收敛. 由引理 2, 可以选取一个子序列 (通过改变记号仍可将它记为 φ_n) 使得 $\varphi_n(x)$ 对于每个 $x \in V_1$ 收敛. 因为 $V_1 \cap V_2$ 非空, 所以引理 2 允许我们选取一个对于每个 $x \in V_2$ 都收敛的子序列, 如此继续下去. 这样以来, 原来的序列 φ_n 有一个子序列 $\varphi_{1,k}$ 使得 $\varphi_{1,k}(b_1)$ 收敛. 从这个子序列又可以选取一个子序列 $\varphi_{2,k}$ 使得 $\varphi_{2,k}(b_2)$ 收敛. 就像在引理 2 的证明中那样得到一个对角线序列使得 $\varphi_{k,k}(b_n)$ 对于每个 n 收敛. 通过改变记号将这个对角线序列记作 φ_n. 从而对每个 b_i, $\varphi_n(b_i)$ 收敛.

现在我们要证明 $\varphi_n(x)$ 对于每个 $x \in M$ 都收敛. 由引理 1, 在 V_x 中有某个 b_i, 从而存在一个 N 和一个紧集 K 使得当 $n > N$ 时就有 $\varphi_n(V_x) \subset K$. 像在引理 2 证明的后半部分那样进行即可证明 $\varphi_n(x)$ 是一个 Cauchy 序列. 因为对于 $n > N, \varphi_n(x) \in K$, 因而推出 $\varphi_n(x)$ 收敛.

引理 4 设 φ_n 是一个等距变换序列使得 $\varphi_n(x)$ 对于每个 $x \in M$ 收敛. 对每个 x 定义 $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$, 那么 φ 是一个等距变换.

证明 虽然对任何 $x, y \in M$, $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$. 对任何 $a \in M$, 令 $a' = \varphi(a)$. 从 $d(\varphi_n^{-1} \circ \varphi(a), a) = d(\varphi(a), \varphi_n(a))$ 可知 $\varphi_n^{-1}(a')$ 收敛于 a. 由引理 3, 有一个子序列 φ_{n_k} 使得 $\varphi_{n_k}^{-1}(y)$ 对于每个 $y \in M$ 都收敛. 由 $\psi(y) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{n_k}^{-1}(y)$ 定义一个映射 ψ, 那么 ψ 保持距离不变, 即对任何 $x, y \in M$, 都有 $d(\psi(x), \psi(y)) = d(x, y)$. 从下式可知 $\psi(\varphi(x)) = x$ 对于每个 $x \in M$ 成立:

$$
\begin{aligned}
d(\psi(\varphi(x)), x) &= d(\lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}^{-1}(\varphi(x)), x) = \lim_{k\to\infty} d(\varphi_{n_k}^{-1}(\varphi(x)), x) \\
&= \lim_{k\to\infty} d(\varphi(x), \varphi_{n_k}(x)) = d(\varphi(x), \varphi(x)) = 0.
\end{aligned}
$$

这意味着 φ 把 M 映射到 M 上. 因为 ψ 保持距离并且将 M 映射到 M, 所以 ψ^{-1} 存在并且显然等于 φ. 因而 φ 是一个等距变换.

引理 5 令 φ_n 是一个等距变换序列且 φ 是一个等距变换. 若对每个 $x \in M$, $\varphi_n(x)$ 均收敛于 $\varphi(x)$, 那么在 M 的每一个紧子集 K 上, 这个收敛都是一致收敛.

证明 给定 $\delta > 0$, 对每一点 $a \in K$ 选取一个整数 N_a 使得 $n > N_a$ 蕴涵 $d(\varphi_n(a), \varphi(a)) < \delta/4$. 令 $W_a = U(a; \delta/4)$. 那么对任何 $x \in W_a$ 和 $n > N_a$ 都有

$$
\begin{aligned}
d(\varphi_n(x), \varphi(x)) &\leqslant d(\varphi_n(x), \varphi_n(a)) + d(\varphi_n(a), \varphi(a)) + d(\varphi(a), \varphi(x)) \\
&< 2d(x, a) + \delta/4 < \delta.
\end{aligned}
$$

那么 K 能被有限个 W_a 所覆盖, 比方说它们是 $W_i = W_{a_i}, i = 1, \cdots, s$. 由此可知若 $n > \max\limits_i\{N_{a_i}\}$, 则对每个 $x \in K$,

$$d(\varphi_n(x), \varphi(x)) < \delta.$$

引理 6 若像在引理 5 中那样 $\varphi_n(x)$ 收敛于 $\varphi(x)$, 那么对每一个 $x \in M$, $\varphi_n^{-1}(x)$ 收敛于 $\varphi^{-1}(x)$.

证明 对任何 $x \in M$, 令 $y = \varphi^{-1}(x)$. 那么

$$d(\varphi_n^{-1}(x), \varphi^{-1}(x)) = d(\varphi_n^{-1}(\varphi(y)), y) = d(\varphi(y), \varphi_n(y)) \to 0.$$

现在我们来完成定理 4.7 的证明. 首先注意到在 M 的每一个紧子集上, 对于紧开拓扑, $\varphi_n \to \varphi$ 等价于 φ_n 一致收敛于 φ. 如果在 G 中 (对于紧开拓扑)$\varphi_n \to \varphi$, 那么引理 6 蕴涵着对每个 $x \in M$, $\varphi_n^{-1}(x) \to \varphi^{-1}(x)$ 而且由引理 5, 在每个紧子集上收敛是一致的. 因而在 G 中 $\varphi_n^{-1} \to \varphi$. 这意味着将 φ 映为 φ^{-1} 的映射 $G \to G$ 是连续的.

为证 G 是局部紧的, 令 $a \in M$ 并且令 U 是 a 的一个具有紧闭包的开邻域. 我们将证明 G 的单位元的邻域 $W = W(a; U) = \{\varphi \in G; \varphi(a) \in U\}$ 具有紧闭包. 令 φ_n 是 W 中元素的序列. 由于 $\varphi_n(a)$ 包含在紧集 $\bar{U}$(U 的闭包) 中, 那么由引理 3, 我们可以选取一个子序列 φ_{n_k} 使得 $\varphi_{n_k}(x)$ 对于每个 $x \in M$ 都收敛. 根据引理 4, 由 $\varphi(x) = \lim \varphi_{n_k}(x)$ 定义的映射 φ 是 M 的一个等距变换. 由引理 5, 在 M 的每一个紧集上 $\varphi_{n_k} \to \varphi$ 一致成立, 即 $\varphi_{n_k} \to \varphi$ 在 G 中成立, 从而证明了 W 具有紧闭包. 证毕.

推论 4.8 在定理 4.7 的假设条件下, 对于每个 $a \in M$, G 在 a 点处的迷向子群 $G_a = \{\varphi \in G; \varphi(a) = a\}$ 都是紧群.

证明 令 φ_n 是 G_a 的元素序列. 因为对于每个 $n, \varphi_n(a) = a$, 所以由引理 3、4、5, 存在一个子序列 φ_{n_k} 收敛于 G_a 的元素 φ. 证毕.

推论 4.9 若 M 是具有有限个连通分支的局部紧度量空间, 那么 M 的等距变换群 G 关于紧开拓扑是局部紧的.

证明 将 M 分解为其连通分支 M_i 之并, $M = \bigcup\limits_{i=1}^{s} M_i$. 在每个 M_i 中选取一个点 a_i 和 a_i 在 M_i 中具有紧闭包的一个开邻域 U_i. 那么 $W(a_1, \cdots, a_s; U_1, \cdots, U_s) = \{\varphi \in G; \varphi(a_i) \in U_i, i = 1, \cdots, s\}$ 是 G 的单位元的一个具有紧闭包的邻域. 证毕.

推论 4.10 若除满足推论 4.9 的假设条件外 M 还是紧的, 那么 G 是紧的.

证明 令 $G^* = \{\varphi \in G; \varphi(M_i) = M_i, i = 1, \cdots, s\}$. 那么 G^* 是 G 的一个具有有限指标的子群. 在推论 4.9 的证明中令 $U_i = M_i$, 那么 G^* 是紧的, 从而 G 是紧的. 证毕.

1.5 纤 维 丛

令 M 是一个流形而 G 是一个 Lie 群. M 上带群 G 的 (可微) 主纤维丛是由一个流形 P 和 G 在 P 上的作用组成并且满足下列条件:

(1) G 自由地右作用在 P 上: $(u,a)\in P\times G\to ua=R_a u\in P$;

(2) M 是由被 G 诱导的等价关系决定的 P 的商空间, $M=P/G$;

(3) P 是局部平凡的, 即 M 的每一点 x 有一个邻域 U 使得 $\pi^{-1}(U)$ 按下列意义同构于 $U\times G$: 存在一个微分同胚 $\psi:\pi^{-1}(U)\to U\times G$ 使得 $\psi(u)=(\pi(u),\varphi(u))$, 其中 φ 是一个从 $\pi^{-1}(U)$ 到 G 的映射并且对所有 $u\in\pi^{-1}(U)$ 和 $a\in G$ 满足 $\varphi(ua)=(\varphi(u))a$.

我们将把一个主纤维丛记作 $P(M,G,\pi)$ 或 $P(M,G)$ 甚至简记为 P; 并且将 P 称为全空间或丛空间, 将 M 称为底空间, 把 G 称为结构群而将 π 称为投影. 对每个 $x\in M$, $\pi^{-1}(x)$ 是 P 的一个闭子流形, 称为 x 上的纤维. 若 u 是 $\pi^{-1}(x)$ 的一点, 那么 $\pi^{-1}(x)$ 是点 $ua(a\in G)$ 的集合并且称之为过 u 点的纤维. 每一纤维都微分同胚于 G.

给定一个 Lie 群 G 和一个流形 M, G 可自由地右作用在 $P=M\times G$ 上如下. 对于每个 $b\in G$, R_b 把 $(x,a)\in M\times G$ 映射成 $(x,ab)\in M\times G$. 这样得到的主纤维丛 $P(M,G)$ 称为平凡的.

从 $P(M,G)$ 的局部平凡性可以看出, 若 W 是 M 的一个子流形, 那么 $\pi^{-1}(W)$ (W,G) 是一个主纤维丛, 并且称之为 P 在 W 上的部分或 P 在 W 上的限制, 记为 $P|W$.

给定一个主纤维丛 $P(M,G)$, 那么由命题 4.1, G 在 P 上的作用诱导一个从 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 到 P 上向量场的 Lie 代数 $\mathfrak{X}(P)$ 的同态. 对于每个 $A\in\mathfrak{g}$, 将 $A^*=\sigma(A)$ 称作对应于 A 的基本向量场. 因为 G 的作用将每一纤维映射为其自身, 所以 A^*_u 在每一点 $u\in P$ 与该纤维相切. 由命题 4.1, 若 G 自由地作用在 P 上, 则 A^* 在 P 上不可能为零. 每一纤维的维数等于 $\mathfrak{g}$ 的维数. 从 $\mathfrak{g}$ 到 $T_u(P)$ 的映射 $A\to(A^*)_u$ 是一个从 $\mathfrak{g}$ 到过 u 点的纤维在 u 点的切空间的线性同构. 下面证明

命题 5.1 令 A^* 是对应于 $A\in\mathfrak{g}$ 的基本向量场, 那么对于每个 $a\in G$, $(R_a)_*A^*$ 是对应于 $(\mathrm{ad}(a^{-1}))A\in\mathfrak{g}$ 的基本向量场.

证明 因为 A^* 是由单参数变换群 R_{a_t} 诱导的, 其中 $a_t=\exp tA$, 所以由命题 1.7, 向量场 $(R_a)_*A^*$ 是由单参数变换群 $R_aR_{a_t}R_{a^{-1}}=R_{a^{-1}a_ta}$ 诱导的. 要证明的结论可从 $a^{-1}a_ta$ 是由 $(\mathrm{ad}(a^{-1}))A\in\mathfrak{g}$ 生成的单参数变换群这一事实得出. 证毕.

基本向量场的概念将被证明在联络理论中是有用的.

为了把主纤维丛的内蕴定义表述成用开覆盖给出的定义和构造形式就需要转

移函数的概念. 由主纤维丛 $P(M,G)$ 的条件 (3), 我们可以选取 M 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 并且使每个 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 装备一个从 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 到 $U_\alpha\times G$ 的微分同胚 $u\to(\pi(u),\varphi_\alpha(u))$ 使得 $\varphi_\alpha(ua)=(\varphi_\alpha(u))a$. 如果 $u\in\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$, 那么 $\varphi_\beta(ua)(\varphi_\alpha(ua))^{-1}=\varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1}$, 这说明 $\varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1}$ 只依赖于 $\pi(u)$ 而不依赖于 u. 用 $\psi_{\beta\alpha}(\pi(u))=\varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1}$ 可以定义一个映射 $\psi_{\beta\alpha}:U_\alpha\cap U_\beta\to G$. 映射族 $\psi_{\beta\alpha}$ 称为主丛 $P(M,G)$ 相应于 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的转移函数. 容易验证对于 $x\in U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$,

$$(*)\qquad \psi_{\gamma\alpha}(x)=\psi_{\gamma\beta}(x)\cdot\psi_{\beta\alpha}(x).$$

反过来, 则有

命题 5.2 令 M 是一个流形, $\{U_\alpha\}$ 是 M 的一个开覆盖而 G 是一个 Lie 群. 对每个非空的 $U_\alpha\cap U_\beta$, 给定一个映射 $\psi_{\beta\alpha}:U_\alpha\cap U_\beta\to G$, 按照这种方式关系式 $(*)$ 被满足, 那么可以构造一个以 $\psi_{\beta\alpha}$ 为转移函数的 (可微) 主纤维丛 $P(M,G)$.

证明 首先注意到 $(*)$ 式蕴涵着对每个 $x\in U_\alpha$, $\psi_{\alpha\alpha}(x)=e$, 而对每个 $x\in U_\alpha\cap U_\beta$, $\psi_{\alpha\beta}(x)\cdot\psi_{\beta\alpha}(x)=e$. 对于每个指标 α, 令 $X_\alpha=U_\alpha\times G$ 并且令 $X=\bigcup\limits_\alpha X_\alpha$ 是 X_α 的拓扑和; X 的每个元素是一个三元组 (α,x,a), 其中 α 是某个指标, $x\in U_\alpha$, $a\in G$. 因为每个 X_α 都是可微流形而且 X 是 X_α 的不交并, 所以 X 自然是一个可微流形. 在 X 中引进一个等价关系如下. 称 $(\alpha,x,a)\in\{\alpha\}\times X_\alpha$ 等价于 $(\beta,y,b)\in\{\beta\}\times X_\beta$, 当且仅当 $x=y\in U_\alpha\cap U_\beta$ 且 $b=\psi_{\beta\alpha}(x)a$. 我们指出当且仅当 $x=y$ 和 $a=b$ 时, (α,x,a) 与 (α,y,b) 等价. 令 P 是由这个等价关系 ρ 得出的 X 的商空间. 首先证明 G 自由地右作用在 P 上并且 $P/G=M$. 由定义, 每个 $c\in G$ 把 (α,x,a) 的 ρ 等价类映射为 (α,x,ac) 的 ρ 等价类. 容易看出, 这个定义不依赖于代表 (α,x,a) 的选取而且 G 自由地右作用于 P 上. 由定义, 投影 $\pi:P\to M$ 把 (α,x,a) 的 ρ 等价类映射成 x; π 的定义不依赖于代表 (α,x,a) 的选取. 对于 $u,v\in P$, $\pi(u)=\pi(v)$ 当且仅当 $v=uc$ 对某个 $c\in G$ 成立. 实际上, 令 (α,x,a) 和 (β,y,b) 分别是 u 和 v 的代表. 如果 $v=uc$ 对某个 $c\in G$ 成立, 那么 $y=x$, 因此 $\pi(v)=\pi(u)$. 反过来, 若 $\pi(u)=x=y=\pi(v)\in U_\alpha\cap U_\beta$, 那么 $v=uc$, 其中 $c=a^{-1}\psi_{\beta\alpha}(x)^{-1}b\in G$. 为使 P 成为一个可微流形, 首先注意到通过自然映射 $X\to P=X/\rho$, 每个 $X_\alpha=U_\alpha\times G$ 被一一映射到 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上. 我们可以通过要求 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 是 P 的一个开子流形并且映射 $X\to P$ 诱导从 $X_\alpha=U_\alpha\times G$ 到 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 的一个微分同胚而在 P 上引进一个可微结构. 这之所以成为可能是由于 P 的每一点对于某个 α 被包含在 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 中而且 (α,x,a) 与 $(\beta,x,\psi_{\beta\alpha}(x)a)$ 的等同是通过可微映射实现的. 容易证实 G 在 P 上的作用是可微的并且 $P(M,G,\pi)$ 是一个可微主纤维丛. 最后, 若把 $\psi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times G$ 定义为 $\psi_\alpha(u)=(x,a)$, 其中 $u\in\pi^{-1}(U)$ 是 (α,x,a) 的 ρ 等价类, 那么 P 相应于覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的转移函数恰好是给定的 $\psi_{\beta\alpha}$. 证毕.

从主纤维丛 $P'(M',G')$ 到另一个主纤维丛 $P(M,G)$ 的同态是由映射 $f':P'\to P$ 和同态 $f'':G'\to G$ 组成的并且使得 $f'(u'a')=f'(u')f''(a')$ 对所有 $u'\in P'$ 和 $a'\in G'$ 成立. 为了简单起见用同一个字母 f 表示 f' 和 f''. 每个同态 $f:P'\to P$ 把 P' 的每条纤维映射成 P 的纤维从而诱导一个从 M' 到 M 的映射, 仍然记为 f. 如果诱导映射 $f:M'\to M$ 是一个嵌入并且 $f:G'\to G$ 是一个单同态, 则把同态 f: $P'(M'G')\to P(M,G)$ 称为嵌入或内射. 通过将 P' 与 $f(P')$ 等同, 将 G' 与 $f(G')$ 等同, 将 M' 与 $f(M')$ 等同, 则可以说 $P'(M',G')$ 是 $P(M,G)$ 的一个子丛. 此外若 $M'=M$ 并且诱导映射 $f:M'\to M$ 是 M 的恒等变换, 那么就把 $f:P'(M'G')\to P(M,G)$ 称为 $P(M,G)$ 的结构群 G 到 G' 的约化. 并把子丛 $P'(M',G')$ 称为约化丛. 给定 $P(M,G)$ 和 G 的一个 Lie 子群 G', 如果存在一个约化丛 $P'(M,G')$, 则称结构群 G 对 G' 是可约化的. 请注意到一般并不要求 G' 是 G 的闭子群. 这种一般性在联络理论中将是需要的.

命题 5.3 主纤维丛 $P(M,G)$ 的结构群 G 对于 Lie 子群 G' 是可约化的当且仅当 M 有一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 并且存在一个在 G' 中取值的转移函数族 $\{\psi_{\beta\alpha}\}$.

证明 首先假定结构群 G 对于 G' 是可约化的而且令 $P'(M,G')$ 是一个约化丛. 将 P' 看作 P 的子流形. 令 $\{U_\alpha\}$ 是 M 的一个开覆盖使得每个 $\pi'^{-1}(U_\alpha)$(π' 是从 P' 到 M 上的投影) 都装备了一个从 $\pi'^{-1}(U_\alpha)$ 到 $U_\alpha\times G'$ 的同构 $u\to(\pi'(u),\varphi'_\alpha(u))$. 现在对于同一个覆盖 $\{U_\alpha\}$, 可以通过扩张 φ'_α 来定义一个从 $\pi^{-1}(U_\alpha)$(π 是从 P 到 M 上的投影) 到 $U_\alpha\times G$ 的同构如下. 将 $v\in\pi^{-1}(U_\alpha)$ 表示成 $v=ua$ 的形式, 其中 $u\in\pi'^{-1}(U_\alpha)$ 且 $a\in G$, 并且置 $\varphi_\alpha(v)=\varphi'_\alpha(u)a$. 容易看出 $\varphi_\alpha(v)$ 不依赖于表示 $v=ua$ 的选取, 而且可以看出 $v\to(\pi(v),\varphi_\alpha(v))$ 是从 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 到 $U_\alpha\times G$ 的同构, 相应的转移函数 $\psi_{\beta\alpha}(x)=\varphi_\beta(v)(\varphi_\alpha(v))^{-1}=\varphi'_\beta(u)(\varphi'_\alpha(u))^{-1}$ 在 G' 中取值.

反过来, 假设 M 有一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 而且有一个在 G 的 Lie 子群 G' 中取值的转移函数族 $\{\psi_{\beta\alpha}\}$. 对于 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$, $\psi_{\beta\alpha}$ 是从 $U_\alpha\cap U_\beta$ 到 Lie 群 G 中的可微映射使得 $\psi_{\beta\alpha}(U_\alpha\cap U_\beta)\subset G'$, 关键点是: $\psi_{\beta\alpha}$ 对于 G' 的可微结构是从 $U_\alpha\cap U_\beta$ 到 G' 的可微映射. 这可从命题 1.3 得出. 注意到由定义, 一个 Lie 子群满足第二可数公理, 参看 1.4 节. 由命题 5.2, 从 $\{U_\alpha\}$ 和 $\{\psi_{\beta\alpha}\}$ 可以构造一个主纤维丛 $P'(M,G')$. 最后将 P' 嵌入 P 中如下. 令 $f_\alpha:\pi'^{-1}(U_\alpha)\to\pi^{-1}(U_\alpha)$ 是下列三个映射的复合:

$$\pi'^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times G'\to U_\alpha\times G\to\pi^{-1}(U_\alpha).$$

容易看出, 在 $\pi'^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$ 上 $f_\alpha=f_\beta$, 因而由 $\{f_\alpha\}$ 定义的映射 $f:P'\to P$ 是一个内射. 证毕.

令 $P(M,G)$ 是一个主纤维丛、F 是一个流形且 G 左作用于其上: $(a,\xi)\in G\times F\to a\xi\in F$. 我们来构造一个伴随于 P 且以 F 为标准纤维的纤维丛 $E(M,F,G,P)$. 在积流形 $P\times F$ 上, 令 G 右作用如下: 元素 $a\in G$ 将 $(u,\xi)\in P\times F$ 映射成

$(ua, a^{-1}\xi) \in P \times F$. $P \times F$ 在这个群作用下的商空间记为 $E = P \times_G F$. 以后我们将在 E 中引进一个可微结构, 但目前 E 还只是一个集合. 把 (u, ξ) 映为 $\pi(u)$ 的映射 $P \times F \to M$ 诱导一个从 E 到 M 上的映射 π_E, 称为射影. 对于每个 $x \in M$, 集合 $\pi_E^{-1}(x)$ 称为 E 在 x 上的纤维. M 的每一点 x 都有一个邻域 U 使得 $\pi^{-1}(U)$ 同构于 $U \times G$. 将 $\pi^{-1}(U)$ 等同于 $U \times G$, 则可以看出 G 在 $\pi^{-1}(U) \times F$ 上的右作用由下式给出:

$$(x, a, \xi) \to (x, ab, b^{-1}\xi), \quad (x, a, \xi) \in U \times G \times F, \quad b \in G.$$

由此可知同构 $\pi^{-1}(U) \approx U \times G$ 诱导一个同构 $\pi_E^{-1}(U) \approx U \times F$. 因此可以通过要求 $\pi_E^{-1}(U)$ 是 E 的一个开子流形并且在同构 $\pi_E^{-1}(U) \approx U \times F$ 之下微分同胚于 $U \times F$ 而在 E 中引进一个可微结构. 于是射影 π_E 是一个从 E 到 M 上的可微映射. 我们把 E 或更确切地说是把 $E(M, F, G, P)$ 称作伴随于主丛 P 的、以 M 为底流形、以 F 为 (标准) 纤维、以 G 为 (结构) 群的纤维丛.

命题 5.4 令 $P(M, G)$ 是一个主纤维丛而 F 是一个由 G 左作用于其上的流形. 令 $E(M, F, G, P)$ 是伴随于 P 的纤维丛. 对每个 $u \in P$ 和每个 $\xi \in F$, 以 $u\xi$ 表示 $(u, \xi) \in P \times F$ 在自然射影 $P \times F \to E$ 下的象. 那么每个 $u \in P$ 都是从 F 到 $F_x = \pi_E^{-1}(x)$ 上的一个映射, 其中 $x = \pi(u)$ 并且

$$(ua)\xi = u(a\xi), \quad u \in P, a \in G, \xi \in F.$$

证明是平凡的, 因而把它留给读者.

当我们提到从某一纤维 $F_x = \pi_E^{-1}(x) (x \in M)$ 到另一纤维 $F_y (y \in M)$ 的同构时是指一个可以用形式 $v \circ u^{-1}$ 表示的微分同胚, 其中 $u \in \pi^{-1}(x)$ 和 $v \in \pi^{-1}(y)$ 分别被看作从 F 到 F_x 和 F_y 上的映射. 特别纤维 F_x 的自同构是一个形如 $v \circ u^{-1} (u, v \in \pi^{-1}(x))$ 的映射. 在此情况下, $v = ua$ 对某个 $a \in G$ 成立, 因而 F_x 的任何自同构可以表示成 $u \circ a \circ u^{-1}$ 的形式, 其中 u 是 $\pi^{-1}(x)$ 的任意一个固定点. 从而 F_x 的自同构群同构于结构群 G.

例 5.1 $G(G/H, H)$: 令 G 是一个 Lie 群且 H 是 G 的一个闭子群. 让 H 右作用在 G 上如下. 每个 $a \in H$ 把 $u \in G$ 映射为 ua. 于是得到底流形 G/H 上的一个以 H 为结构群的可微主纤维丛 $G(G/H, H)$, 局部平凡性从局部截面的存在性得出. Chevalley [1; p.110] 中证明了若 π 是 G 到 G/H 上的投影且 e 是 G 的单位元, 那么存在一个从 $\pi(e)$ 在 G/H 中的邻域到 G 中的映射 σ 使得 $\pi \circ \sigma$ 是该邻域上的恒等变换. 也可以参看 Steenrod [1; pp.28-33].

例 5.2 线性标架丛: 令 M 是一个 n 维流形. 在点 $x \in M$ 处的一个线性标架 u 是切空间 $T_x(M)$ 的一个有序基 $X_1, \cdots, X_n$. 令 $L(M)$ 是在 M 的所有点处的所有线性标架 u 的集合, 再令 π 是从 $L(M)$ 到 M 的一个映射, 它将 x 点

的线性标架 u 映射成 x 点. 一般线性群 $GL(n;\mathbf{R})$ 右作用在 $L(M)$ 上如下. 若 $a=(a^i_j)\in GL(n;\mathbf{R})$ 且 $u=(X_1,\cdots,X_n)$ 是 x 点的一个线性标架, 那么由定义 ua 是由 $Y_i=\sum_j a^j_i X_j$ 定义的 x 点处的线性标架 $(Y_1,\cdots,Y_n)$. 显然 $GL(n;\mathbf{R})$ 是自由作用在 $L(M)$ 上而且 $\pi(u)=\pi(v)$ 当且仅当 $v=ua$ 对于某个 $a\in GL(n;\mathbf{R})$ 成立. 现在为了在 $L(M)$ 中引入一个可微结构, 令 $(x^1,\cdots,x^n)$ 是 M 的坐标邻域 U 上的局部坐标系. $x\in U$ 点处的每一个标架都能唯一地表示成 $u=(X_1,\cdots,X_n)$ 的形式, 其中 $X_i=\sum_k X^k_i\left(\dfrac{\partial}{\partial x^k}\right)$ 而且 (X^k_i) 是非奇异矩阵. 这说明 $\pi^{-1}(U)$ 和 $U\times GL(n;\mathbf{R})$ 是一一对应的. 通过取 (x^j) 并且以 (X^k_i) 作为 $\pi^{-1}(U)$ 上的局部坐标系. 可使 $L(M)$ 成为一个可微流形. 那么容易验证 $L(M)(M;GL(n;\mathbf{R}))$ 是一个主纤维丛. 我们将 $L(M)$ 称为 M 上的线性标架丛. 根据命题 5.4. 点 $x\in M$ 处的线性标架 u 也可以定义成从 $\mathbf{R}^n$ 到 $T_x(M)$ 的非奇异线性映射. 两种定义之间的相互关系如下. 令 $e_1,\cdots,e_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的自然基: $e_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,\cdots,0,1)$. x 点的线性标架 $u=(X_1,\cdots,X_n)$ 可以作为一个线性映射 $u:\mathbf{R}^n\to T_x(M)$ 使得 $ue_i=X_i, i=1,\cdots,n$. $GL(n;\mathbf{R})$ 在 $L(M)$ 上的作用可以相应地解释如下. 把 $a=(a^i_j)\in GL(n;\mathbf{R})$ 看作 $\mathbf{R}^n$ 的一个线性变换, 它将 e_j 映射为 $\sum_i a^i_j e_i$. 那么 $ua:\mathbf{R}^n\to T_x(M)$ 是下列两个映射的复合:

$$\mathbf{R}^n \xrightarrow{a} \mathbf{R}^n \xrightarrow{u} T_x(M).$$

例 5.3 切丛: 令 $GL(n;\mathbf{R})$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上的作用如上. M 上的切丛 $T(M)$ 是伴随于 $L(M)$ 且以 $\mathbf{R}^n$ 为标准纤维的丛. 容易证明 $T(M)$ 在 $x\in M$ 点上的纤维可以看作 $T_x(M)$.

例 5.4 张量丛: 如同 1.2 中所定义的那样, 令 $\boldsymbol{T}^r_s$ 是向量空间 $\mathbf{R}^n$ 上的 (r,s) 型张量空间. 由命题 2.12, 群 $GL(n;\mathbf{R})$ 可以看作空间 $\boldsymbol{T}^r_s$ 的线性变换群. 由这个标准纤维 $\boldsymbol{T}^r_s$, 则可得到 M 上伴随于 $L(M)$ 的 (r,s) 型张量丛 $T^r_s(M)$. 容易看出 $T^r_s(M)$ 在 $x\in M$ 点上的纤维可以看作 $T_x(M)$ 上的 (r,s) 型张量空间.

回到一般情况, 令 $P(M,G)$ 是一个主纤维丛且 H 是 G 的一个闭子群. 自然, G 左作用在商空间 G/H 上. 令 $E(M,G/H,G,P)$ 是以 G/H 为标准纤维的伴随丛. 另一方面, 作为 G 的一个子群, H 右作用在 P 上. 令 P/H 是 P 在 H 的这个作用下的商空间. 那么我们有下列命题.

命题 5.5 伴随于 P 且以 G/H 为标准纤维的丛 $E=P\times_G(G/H)$ 可等同于 P/H 如下. 将 E 的一个由 $(u,a\xi_0)\in P\times G/H$ 表示的元素映射成 G/H 的由 $ua\in P$ 表示的元素, 其中 $a\in G$ 且 ξ_0 是 G/H 的原点, 亦即陪集 H.

反过来, $P(E,H)$ 是底空间 $E=P/H$ 上以 H 为结构群的主纤维丛. 投影

$P \to E$ 把 $u \in P$ 映射为 $u\xi_0 \in E$, 其中 u 被看作从标准纤维 G/H 到 E 的纤维中的映射.

证明 除了从 $P(E,H)$的局部平凡性以外, 证明是直接的. 这可以从$E(M,G/H,G,P)$ 和 $G(G/H,H)$ 的局部平凡性得出如下. 令 U 是 M 的一个开集使得 $\pi_E^{-1}(U) \approx U \times G/H$ 并且令 V 是 G/H 的开集使得 $p^{-1}(V) \approx V \times H$, 其中 $p: G \to G/H$ 是投影. 令 W 是 $\pi_E^{-1}(U) \subset E$ 的一个开集, 且在等同 $\pi_E^{-1}(U) \approx U \times G/H$ 之下对应于 $U \times V$. 如果 $\mu: P \to E = P/H$ 是投影, 那么 $\mu^{-1}(W) \approx W \times H$. 证毕.

从 $E(M,F,G,P)$ 的截面是一个映射 $\sigma: M \to E$ 使得 $\pi_E \circ \sigma$ 为 M 的恒等变换. 对于 $P(M,G)$ 本身来说, 截面 $\sigma: M \to P$ 存在当且仅当 P 是平凡从 $M \times G$(参看 Steenrod [1; p.36]). 更一般地有

命题 5.6 $P(M,G)$ 的结构群 G 对于闭子群 H 是可约化的当且仅当伴随从 $E(M,G/H,G,P)$ 允许有一个截面 $\sigma: M \to E = P/H$.

证明 设 G 对于闭子群 H 是可约化的并且令 $Q(M,H)$ 是关于内射 $f: Q \to P$ 的约化丛. 令 $\mu: P \to E = P/H$ 为投影. 若 u 和 v 在 Q 的同一纤维中, 那么 $v = ua$ 对于某个 $a \in H$ 成立, 因此 $\mu(f(v)) = \mu(f(u)a) = \mu(f(u))$. 这意味着 $\mu \circ f$ 在 Q 的每一纤维上均为常值并且诱导一个映射 $\sigma: M \to E$, $\sigma(x) = \mu(f(u))$, 其中 $x = \pi(f(u))$. 显然 σ 是 E 的一个截面. 反过来, 给定一个截面 $\sigma: M \to E$, 令 Q 是使得 $\mu(u) = \sigma(\pi(u))$ 的点的集合, 换句话说, Q 是 $\sigma(M)$ 在投影 $\mu: P \to E = P/H$ 之下的逆象. 对于每个 $x \in M$ 均有 $u \in Q$ 使得 $\pi(u) = x$, 这是因为 $u^{-1}(\sigma(x))$ 是非空的. 在 P 的同一纤维中给定 u 和 v, 若 $u \in Q$. 那么当且仅当 $v = ua$ 对某个 $a \in H$ 成立时 $v \in Q$. 这可以从下列事实得出: $\mu(u) = \mu(v)$ 当且仅当 $v = ua$ 对于某个 $a \in H$ 成立. 容易验证 Q 是 P 的一个闭子流形并且 Q 是一个嵌入在 $P(M,G)$ 中的主纤维丛 $Q(M,H)$. 证毕.

评注 截面 $\sigma: M \to E = P/H$ 和子流形 Q 之间的对应是一一的.

现在我们来考虑在底流形的一个子集上定义的截面的扩张问题. 如果从流形 M 的子集 A 到另一个流形 M' 的映射 f 对于每一点 $x \in A$ 都有从 x 在 M 中的一个开邻域 U_x 到 M' 中的一个可微映射 f_x 使得在 $U_x \cap A$ 上有 $f_x = f$, 则称 f 在 A 上是可微的. 如果 f 是从包含 A 的开集 W 到 M' 的一个可微映射的限制, 那么 f 在 A 上显然是可微的. 给定一个纤维丛 $E(M,F,G,P)$ 和 M 的子集 A, 那么 A 上的截面是指 A 到 E 中的一个可微映射 σ 使得 $\pi_E \circ \sigma$ 是 A 的恒等变换.

定理 5.7 令 $E(M,F,G,P)$ 是一个纤维丛, 其底流形 M 是仿紧的, 其纤维 F 微分同胚于 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$. 令 A 是 M 的一个闭子集 (可以是空集), 那么每一个在 A 上定义的截面 $\sigma: A \to E$ 都能扩张成在 M 上定义的截面. 在 A 为空集的特殊情况下, 存在 E 的在 M 上定义的截面.

证明 正是由于仿紧空间的定义, M 的每一个开覆盖都有一个局部有限的开

加细. 因为 M 是正规的, 所以 M 的每个局部有限的开覆盖 $\{U_i\}$ 都有一个开加细 $\{V_i\}$ 使得 $\bar{V}_i \subset U_i$ 对所有 i 成立 (参看附录 3).

引理 1 在 $\mathbf{R}^n$ 的闭子集上定义的可微函数能够扩张成 $\mathbf{R}^n$ 上的可微函数 (参看附录 3).

引理 2 M 的每一点都有一个邻域 U 使得 E 的每个在 U 的闭子集上定义的截面都能扩张到 U 上.

证明 给定 M 的一点, 只需取一个坐标邻域 U 使得 $\pi_E^{-1}(U)$ 是平凡的: $\pi_E^{-1}(U) \approx U \times F$ 就行了. 因为 F 微分同胚于 $\mathbf{R}^n$, 所以 U 上的一个截面可等同于定义在 U 上的 m 个函数 $f_1, \cdots, f_m$ 的集合. 由引理 1, 这些函数都能扩张到 U 上.

下面我们用引理 2 来证明定理 5.7. 令 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 M 的一个局部有限开覆盖使得每个 U_i 均具有引理 2 中所述的性质. 令 $\{V_i\}$ 是 $\{U_i\}$ 的一个开加细使得 $\bar{V}_i \subset U_i$ 对所有 $i \in I$ 成立. 对于指标集 I 的每一个子集 J, 置 $S_J = \bigcup\limits_{i\in J} \bar{V}_i$. 令 T 是二元组 (τ, J) 的集合, 其中 $J \subset I$ 且 τ 是在 S_J 上定义的 E 的截面使得在 $A \cap S_J$ 上 $\tau = \sigma$. 集合 T 是非空的; 取 U_i 与 A 相交并将 σ 在 $A \cap \bar{V}_i$ 上的限制扩张成 $\bar{V}_i$ 上的截面, 根据 U_i 所具有的性质这是可能的. 在 T 中引进一个序关系如下: 若 $J' \subset J''$ 且在 $S_{J'}$ 上 $\tau' = \tau''$, 则 $(\tau', J') < (\tau'', J'')$. 令 (τ, J) 是一个极大元 (通过用 Zorn 引理). 假设 $J \neq I$ 并且令 $i \in I - J$. 在包含于 U_i 中的闭集 $(A \cap S_J) \cap \bar{V}_i$ 上有一个完全确定的截面 σ_i: 在 $A \cap \bar{V}_i$ 上 $\sigma_i = \sigma$ 而在 $S_J \cap \bar{V}_i$ 上 $\sigma_i = \tau$. 将 σ_i 扩张成 $\bar{V}_i$ 上的一个截面 τ_i, 由 U_i 所具有的性质这是可能的. 令 $J' = J \cup \{i\}$ 而且 τ' 是由在 S_J 上 $\tau' = \tau$ 和在 $\bar{V}_i$ 上 $\tau' = \tau_i$ 定义的 $S_{J'}$ 上的截面. 那么 $(\tau, J) < (\tau', J')$, 但这与 (τ, J) 的极大性矛盾. 因而 $I = J$ 并且 τ 就是所要求的截面. 证毕.

这里所给出的证明取自 Godement [1; p.151].

例 5.5 令 $L(M)$ 是 n 维流形 M 上的线性标架丛. 由类似于 Chevalley[1; p.16] 的讨论可知齐性空间 $GL(n;\mathbf{R})/O(n)$ 微分同胚于 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 维 Euclid 空间. (由定理 5.7) 如果 M 是仿紧的, 那么伴随于 $L(M)$ 且以 $GL(n;\mathbf{R})/O(n)$ 为纤维的纤维丛 $E = L(M)/O(n)$ 允许有一个截面. 由命题 5.6 看出, 假如 M 是仿紧的, 那么 $L(M)$ 的结构群能够约化为正交群 $O(n)$.

例 5.6 更一般地, 令 $P(M, G)$ 是仿紧流形 M 上带群 G 的主纤维丛, 而且 G 是一个连通 Lie 子群. 已知 G 微分同胚于它的任何一个极大紧子群 H 与一个 Euclid 空间的直积 (参看 Iwasawa[1]). 由跟上面同样的推理, 可将结构群 G 约化为 H.

例 5.7 令 $L(M)$ 是 n 维流形 M 上的线性标架丛. 令 $(\ ,\ )$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的自然内积, 关于这个内积, $e_1 = (1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, \cdots, 0, 1)$ 是正交的, 而且正是由于 $O(n)$ 的定义, 这个内积是在 $O(n)$ 作用下不变的. 我们将证明结构群 $GL(n;\mathbf{R})$ 到

$O(n)$ 的每种约化将产生 M 上的一种 Riemann 度量. 令 $Q(M, O(n))$ 是 $L(M)$ 的一个约化子丛. 若将每个 $u \in L(M)$ 看作从 $\mathbf{R}^n$ 到 $T_x(M)$(其中 $x = \pi(u)$) 上的一个线性同构, 那么每个 $u \in Q$ 定义 $T_x(M)$ 的一个内积 g:

$$g(X, Y) = (u^{-1}X, u^{-1}Y), \quad X, Y \in T_x(M).$$

$(\ ,\ )$ 在 $O(n)$ 作用下的不变性蕴涵着 $g(X, Y)$ 不依赖于 $u \in Q$ 的选取. 反过来, 若 M 已给定了一个 Riemann 度量 g, 令 Q 是由线性标架 $u = (X_1, \cdots, X_n)$ 组成的 $L(M)$ 的子集, 则它关于 g 是正交的. 若把 $u \in L(M)$ 看作从 $\mathbf{R}^n$ 到 $T_x(M)$ 的线性同构, 那么 u 属于 Q 当且仅当对所有 $\xi, \xi' \in \mathbf{R}^n$, $(\xi, \xi') = g(u\xi, u\xi')$. 容易验证 Q 形成 $L(M)$ 在 M 上以 $O(n)$ 为结构群的约化子丛. 从 Q 称为 M 上的正交标架丛并且记为 $O(M)$. $O(M)$ 的元素是正交标架. 这里的结果与例 5.5 结合则蕴涵着每个仿紧流形 M 都允许有一个 Riemann 度量. 以后将看到每个 Riemann 流形都是一个度量空间, 因而是仿紧的.

为了引进诱导丛的概念我们证明下列命题.

命题 5.8　给定一个主纤维丛 $P(M, G)$ 和从流形 N 到流形 M 的一个映射 f, 则有唯一的 (当然是在同构意义下的唯一) 一个主纤维丛 $Q(N, G)$ 而且伴有一个同态 $f: Q \to P$ 使得这个同态诱导 $f: N \to M$ 并且该同态对应于 G 的恒等自同构.

从 $Q(N, G)$ 称为由 f 从 $P(M, G)$ 诱导的丛, 简称诱导丛, 有时记为 $f^{-1}P$.

证明　在直积 $N \times P$ 中考虑由使得 $f(y) = \pi(u)$ 的 $(y, u) \in N \times P$ 组成的子集 Q. 群 G 通过 $(y, u) \to (y, u)a = (y, ua)((y, u) \in Q, a \in G)$ 作用在 Q 上. 容易看出 G 是自由作用在 Q 上而且 Q 是 N 上带有结构群 G 的一个主纤维丛且投影 π_Q 由 $\pi_Q(y, u) = y$ 给出. 令 Q' 是 N 上带有群 G 的另一个主丛且 $f': Q' \to P$ 是诱导 $f: N \to M$ 的一个同态而且它对应于 G 的恒等自同构. 那么容易证明由 $u' \to (\pi_{Q'}(u'), f'(u'))(u' \in Q')$ 定义的从 Q' 到 Q 的映射是从 Q' 到从 Q 的一个同构, 它诱导 N 上的恒等变换并且它对应于 G 的恒等自同构.　证毕.

现在我们来回顾以后将要用到的关于覆盖空间的一些结果. 给定一个连通且局部弧连通的拓扑空间 M 和一个连通空间 E. 如果 M 的每一点 x 都有一个连通开邻域 U 使得 $p^{-1}(U)$ 的每一个连通分支在 E 中是开的并且被 p 同胚地映射到 U 上, 那么就把连通空间 E 称为 M 上关于投影 $p: E \to M$ 的覆盖空间. 对于两个覆盖空间 $p: E \to M$ 和 $p': E' \to M$, 如果存在一个同胚 $f: E \to E'$ 使得 $p' \circ f = p$, 则称它们是同构的. 对于一个覆盖空间 $p: E \to M$, 若 E 是单连通的, 那么就将它称为一个万有覆盖空间. 若 M 是一个流形, 那么每个覆盖空间都有一个 (唯一的) 流形结构使 p 是可微的. 今后我们将只考虑覆盖流形.

命题 5.9　(1) 给定一个连通流形 M, 则有 (在同构意义下) 唯一的万有覆盖流形, 记为 $\tilde{M}$.

(2) 万有覆盖流形 $\tilde{M}$ 是 M 上的一个主纤维丛而且带有结构群 $\pi_1(M)$ 和投影 $p:\tilde{M}\to M$, 其中 $\pi_1(M)$ 是 M 的第一同伦群亦称基本群.

(3) M 上覆盖空间的同构类与 $\pi_1(M)$ 的子群的共轭类是一一对应的. 这个对应可给出如下, 对 $\pi_1(M)$ 的每个子群 H, 均伴之以 $E=\tilde{M}/H$. 那么与 H 对应的覆盖流形 E 是 M 上的一个纤维丛并且带有与主丛 $\tilde{M}(M,\pi_1(M))$ 相伴的纤维 $\pi_1(M)/H$. 如果 H 是 $\pi_1(M)$ 的正规子群, 那么 $E=\tilde{M}/H$ 是一个以 $\pi_1(M)/H$ 为结构群的主纤维丛, 称为 M 的正则覆盖流形.

其证明请参看 Steenrod [1; pp. 67-71] 或者 Hu(胡世桢)[1; pp.89-97].

$\pi_1(M)/H$ 在正则覆盖流形 $E=\tilde{M}/H$ 上的作用是真不连续的. 反过来, 若 E 是一个连通流形而 G 是一个自由作用在 E 上的真不连续变换群, 那么 E 是 $M=E/G$ 的正则覆盖流形. 这一点从 1.4 节中真不连续作用的定义的条件 (3) 立即可以得出.

例 5.8 将 $\mathbf{R}^n$ 看作一个 n 维向量空间, 令 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的任何一个基. 令 G 是由 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 生成的 $\mathbf{R}^n$ 的子群: $G=\{\Sigma m_i\xi_i; m_i$ 为整数$\}$. G 在 $\mathbf{R}^n$ 上的作用是真不连续的并且 $\mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{R}^n/G$ 的万有覆盖流形. 我们把商流形 $\mathbf{R}^n/G$ 称作 n 维环面.

例 5.9 令 S^n 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的中心在原点的单位球面: $S^n=\left\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1},\sum_i(x^i)^2=1\right\}$. 令 G 是由 S^n 的恒等变换和将 $(x^1,\cdots,x^{n+1})$ 映射成 $(-x^1,\cdots,-x^{n+1})$ 的变换组成的群. 那么 $S^n(n\geqslant 2)$ 是 S^n/G 的万有覆盖流形. 我们将商流形 S^n/G 称作 n 维实射影空间.

第二章　联络理论

2.1　主纤维丛上的联络

令 $P(M,G)$ 是流形 M 上带结构群 G 的主纤维丛. 对于每个 $u\in P$, 令 $T_u(P)$ 是 P 在 u 点的切空间而 G_u 是由与过 u 点的纤维相切的向量组成的 $T_u(P)$ 的子空间. P 上的联络 Γ 是这样一种指派, 它对每个 $u\in P$ 指定 $T_u(P)$ 的一个子空间 Q_u 并且使得

(a) $T_u(P)=G_u+Q_u$(直和);

(b) 对每个 $u\in P$ 和 $a\in G$, $Q_{ua}=(R_a)_*Q_u$, 其中 R_a 是由 $a\in G$, $R_au=ua$ 诱导的 P 上的变换;

(c) Q_u 可微地依赖于 u.

条件 (b) 意味着分布 $u\to Q_u$ 是经 G 作用不变的. G_u 称为 $T_u(P)$ 的垂直子空间, Q_u 称为 $T_u(P)$ 的水平子空间. 若向量 $X\in T_u(P)$ 在 $G_u(Q_u)$ 中则相应称为垂直的 (水平的). 由 (a), 每一个向量 $X\in T_u(P)$ 可唯一写成

$$X=Y+Z,\quad 其中 Y\in G_u,\ Z\in Q_u.$$

分别将 Y 和 Z 称为 X 的垂直分量和水平分量并分别记为 vX 和 hX. 由定义, 条件 (c) 意味着若 X 是 P 上的可微向量场, 则 vX 和 hX 也是. (容易验证这等价于说分布 $u\to Q_u$ 是可微的.)

给定 P 上的一个联络 Γ, 在 P 上定义一个在 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 中取值的 1 形式如下. 在第一章 1.5 节中已证明, 每个 $A\in\mathfrak{g}$ 在 P 上诱导一个向量场 A^*, 称为对应于 A 的基本向量场, 而且对于每个 $u\in P$, $A\to(A^*)_u$ 是从 $\mathfrak{g}$ 到 G_u 上的一个线性同构. 对于每个 $X\in T_u(P)$, 定义 $\omega(X)$ 是使 $(A^*)_u$ 等于 X 的垂直分量的唯一一个 $A\in\mathfrak{g}$. 显然 $\omega(X)=0$ 当且仅当 X 是水平的. 形式 ω 称为所给联络 Γ 的联络形式.

命题 1.1　一个联络的联络形式 ω 满足下列条件:

(a′) 对于每个 $A\in\mathfrak{g}$, $\omega(A^*)=A$;

(b′) $(R_a)^*\omega=\mathrm{ad}(a^{-1})\omega$, 即对于每个 $a\in G$ 和 P 上的每个向量场 X, $(R_a^*\omega)X=\mathrm{ad}(a^{-1})\cdot\omega(X)$, 其中 ad 是 G 在 $\mathfrak{g}$ 中的伴随表示.

反过来, 在 P 上给定一个满足条件 (a′) 和 (b′) 的 $\mathfrak{g}$ 值 1 形式 ω, 那么在 P 上有唯一的一个联络 Γ 其联络形式为 ω.

证明 令 ω 是一个联络的联络形式. 条件 (a′) 从 ω 的定义立即得出. 因为 P 的每个向量场都能分解成一个水平向量场和一个垂直向量场, 所以只需在下列两种特殊情况下验证 (b′) 就行了. (1) X 是水平的; (2) X 是垂直的. 如果 X 是水平的, 那么由联络的条件 (b), 对于每个 $a \in G$, $(R_a)_*X$ 也是水平的. 因而 $\omega((R_a)_*X)$ 和 $\mathrm{ad}(a^{-1}) \cdot \omega(X)$ 都为零. 在 X 为垂直的情况下, 可以进一步假定 X 是基本向量场 A^*, 那么由第一章命题 5.1, $(R_a)_*X$ 是对应于 $\mathrm{ad}(a^{-1})A$ 的基本向量场. 因而有

$$(R_a^*\omega)_u(X) = \omega_{ua}((R_a)_*X) = \mathrm{ad}(a^{-1})A = \mathrm{ad}(a^{-1})(\omega_u(X)).$$

反过来. 给定一个满足 (a′) 和 (b′) 的形式 ω, 定义

$$Q_u = \{X \in Tu(P);\ \omega(X) = 0\}.$$

容易验证$u \to Q_u$定义一个联络, 其联络形式为ω, 因而将验证工作留给读者. 证毕.

射影 $\pi : P \to M$ 对每个 $u \in P$ 诱导一个线性映射 $\pi : T_u(P) \to T_x(M)$, 其中 $x = \pi(u)$. 当联络给定时, π 将水平子空间 Q_u 同构地映射到 $T_x(M)$ 上.

M 上的向量场 X 的水平提升 (或者简称提升) 是 P 上的唯一一个能投影到 X 上的水平向量场 X^*. 即对每个 $u \in P$, $\pi(X_u^*) = X_{\pi(u)}$.

命题 1.2 给定 P 上的一个联络和 M 上的一个向量场 X. 则 X 有唯一的水平提升 X^*. 对于每个 $a \in G$, 提升 X^* 是经 R_a 作用不变的. 反过来, P 上的每一个在 G 作用下不变的水平向量场 X^* 是 M 上的向量场 X 的提升.

证明 从 π 给出 Q_u 到 $T_{\pi(u)}(M)$ 上的线性同构这个事实, X^* 的存在性和唯一性是明显的. 为了证明若 X 是可微的则 X^* 也是可微的, 取 M 的任何给定点 x 的一个邻域 U 使得 $\pi^{-1}(U) \approx U \times G$. 利用这个同构首先得到 $\pi^{-1}(U)$ 上的一个向量场 Y 使得 $\pi Y = X$. 那么 X^* 是 Y 的水平分量因而是可微的. 由水平子空间在 G 作用下的不变性, X^* 在 G 作用下的不变性是明显的. 最后令 X^* 是 P 上经 G 作用不变的水平向量场. 对每个 $x \in M$, 取一点 $u \in P$ 使得 $\pi(u) = x$ 并且定义 $X_x = \pi(X_u^*)$. 向量场 X_x 不依赖于使得 $\pi(u) = x$ 的 u 的选取, 因为若 $u' = ua$, 那么 $\pi(X_{u'}^*) = \pi(R_a \cdot X_u^*) = \pi(X_u^*)$. 此时 X^* 显然是向量场 X 的提升. 证毕.

命题 1.3 令 X^* 和 Y^* 分别是 X 和 Y 的水平提升, 那么

(1) $X^* + Y^*$ 是 $X + Y$ 的水平提升;

(2) 对于 M 上的每个函数 f, $f^* \cdot X^*$ 是 fX 的水平提升, 其中 f^* 是 P 上由 $f^* = f \circ \pi$ 定义的函数;

(3) $[X^*, Y^*]$ 的水平分量是 $[X, Y]$ 的水平提升.

证明 前两个论断是平凡的. 对于第三个论断有

$$\pi(h[X^*, Y^*]) = \pi([X^*, Y^*]) = [X, Y].$$ 证毕.

令 $x^1, \cdots, x^n$ 是 M 上的坐标邻域 U 中的局部坐标系. 对每个 i, 令 X_i^* 是 U 中的向量场 $X_i = \partial/\partial x^i$ 在 $\pi^{-1}(U)$ 中的水平提升, 那么 $X_1^*, \cdots, X_n^*$ 构成分布 $u \to Q_u$ 在 $\pi^{-1}(U)$ 中的局部基.

现在我们用每一个都是在底流形 M 的一个开子集中定义的一族形式来表示 P 上的联络形式 ω. 令 $\{U_\alpha\}$ 是 M 的一个开覆盖而且有一族同构 $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ 和相应的转移函数族 $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \times U_\beta \to G$. 对于每个 α, 令 $\sigma_\alpha : U_\alpha \to P$ 是 U_α 上由 $\sigma_\alpha(x) = \psi_\alpha^{-1}(x, e)(x \in U_\alpha)$ 定义的截面, 其中 e 是 G 的单位元. 令 θ 是第一章 1.4 节中定义的 G 上的 (左不变 $\mathfrak{g}$ 值) 标准 1 形式.f

对于每个非空集 $U_\alpha \cap U_\beta$, 由

$$\theta_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}^* \theta$$

可在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上定义一个 $\mathfrak{g}$ 值 1 形式. 对每个 α, 则可由

$$\omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega$$

定义 U_α 上的一个 $\mathfrak{g}$ 值 1 形式.

命题 1.4　形式 $\theta_{\alpha\beta}$ 和 ω_α 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上遵从条件:

$$\omega_\beta = \mathrm{ad}(\psi_{\alpha\beta}^{-1})\omega_\alpha + \theta_{\alpha\beta}.$$

反过来, 对于每一族 $\mathfrak{g}$ 值 1 形式 $\{\omega_\alpha\}$, 其中每个 ω_α 都是定义在 U_α 上并且满足上面的条件, 在 P 上都有唯一的联络形式 ω 按所述的方式产生一族 $\{\omega_\alpha\}$.

证明　若 $U_\alpha \cap U_\beta$ 非空, 那么对所有 $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x) \cdot \psi_{\alpha\beta}(x)$. 用同样的字母表示 σ_α, σ_β 及 $\psi_{\alpha\beta}$ 的微分, 那么对于每个向量 $X \in T_x(U_\alpha \cap U_\beta)$, 向量 $\sigma_\beta(X) \in T_u(P)$(其中 $u = \sigma_\beta(x)$) 是 $(\sigma_\alpha(X), \psi_{\alpha,\beta}(X)) \in T_{u'}(P) + T_a(G)$ 在映射 $P \times G \to P$ 下的象, 其中 $u' = \sigma_\alpha(x)$ 且 $a = \psi_{\alpha\beta}(x)$. 由第一章命题 1.4(Leibniz 公式) 得

$$\sigma_\beta(X) = \sigma_\alpha(X)\psi_{\alpha\beta}(x) + \sigma_\alpha(x)\psi_{\alpha\beta}(X),$$

其中 $\sigma_\alpha(X)\psi_{\alpha\beta}(x)$ 表示 $R_a(\sigma_\alpha(X))$ 并且 $\sigma_\alpha(x)\psi_{\alpha\beta}(X)$ 是 $\psi_{\alpha\beta}(X)$ 在 $\sigma_\alpha(x)$ 的微分之下的象, $\sigma_\alpha(x)$ 被看作从 G 到 P 且把 $b \in G$ 映射成 $\sigma_\alpha(x)b$ 的映射. 在等式两边取 ω 的值, 则得到

$$\omega_\beta(X) = \mathrm{ad}(\psi_{\alpha\beta}(x)^{-1})\omega_\alpha(X) + \theta_{\alpha\beta}(X).$$

实际上, 若 $A \in \mathfrak{g}$ 是 G 上的左不变向量场且在 $a = \psi_{\alpha\beta}(x)$ 点等于 $\psi_{\alpha\beta}(X)$ 因而 $\theta(\psi_{\alpha\beta}(X)) = A$, 那么 $\sigma_\alpha(x)\psi_{\alpha\beta}(X)$ 是基本向量场 A^* 在 $u = \sigma_\alpha(x)\psi_{\alpha\beta}(x)$ 点的值, 因而 $\omega(\sigma_\alpha(x)\psi_{\alpha\beta}(X)) = A$.

其逆可以通过沿着从 ω 得到 $\{\omega_\alpha\}$ 的相反过程得以验证.　证毕.

2.2 联络的存在与扩张

令 $P(M,G)$ 是一个主纤维丛且 A 是 M 的一个子集. 若在适合 $\pi(u)\in A$ 的每一点 $u\in P$, 给定 $T_u(P)$ 的一个子空间 Q_u 使之满足联络的条件 (a) 和 (b)(参看 2.1 节) 而且 Q_u 在下述意义上可微地依赖于 u, 则称在 A 上定义了一个联络. 对每一点 $x\in A$ 都存在一个开邻域 U 和 $P|_U=\pi^{-1}(U)$ 上的一个联络使得在每一点 $u\in\pi^{-1}(A)$ 的水平子空间均为给定的空间 Q_u.

定理 2.1 令 $P(M,G)$ 是一个主纤维丛且 A 是 M 的一个闭子集 (可以是空集). 若 M 是仿紧的, 那么每一个在 A 上定义的联络都能扩张成 P 上的联络. 特别, 如果 M 是仿紧的, 那么 P 容许有联络存在.

证明 本定理的证明第一章定理 5.7 的证明的翻版. 证毕.

引理 1 在 $\mathbf{R}^n$ 的闭子集上定义的可微函数总能扩张成 $\mathbf{R}^n$ 上的可微函数 (参看附录 3).

引理 2 M 的每一点都有一个邻域 U 使得在包含于 U 中的闭子集上定义的每一个联络都能扩张成定义在 U 上的联络.

证明 给定 M 的一点, 只需取一个坐标邻域 U 使得 $\pi^{-1}(U)$ 是平凡的: $\pi^{-1}(U)\approx U\times G$. 在平凡丛 $U\times G$ 上, 一个联络形式是完全由它在 $U\times\{e\}$ 的各点处的行为决定的 (e 是 G 的单位元), 这是因为有性质 $R_a^*(\omega)=\mathrm{ad}(a^{-1})\omega$. 此外, 若 $\sigma\colon U\to U\times G$ 是自然截面, 即对 $x\in U$, $\sigma(x)=(x,e)$, 那么 ω 完全是由 U 上的 $\mathfrak{g}$ 值 1 形式 $\sigma^*\omega$ 决定的. 实际上, 每个向量 $X\in T_{\sigma(x)}(U\times G)$ 能唯一地写成如下的形式:

$$X=Y+Z,$$

其中 Y 切于 $U\times\{e\}$ 且 Z 是垂直的因而 $Y=\sigma_*(\pi_*X)$. 所以有

$$\omega(X)=\omega(\sigma_*(\pi_*X))+\omega(Z)=(\sigma^*\omega)(\pi_*X)+A,$$

其中 A 是 $\mathfrak{g}$ 的唯一一个元素使得相应的基本向量场 A^* 在 $\sigma(x)$ 点等于 Z. 因为 A 只依赖于 Z 而不依赖于联络, 所以 ω 完全是由 $\sigma^*\omega$ 决定的. 反过来, 上面的等式说明, U 上的每个 $\mathfrak{g}$ 值 1 形式都唯一决定 $U\times G$ 的一个联络形式. 从而引理 2 归结为 U 上 $\mathfrak{g}$ 值 1 形式的扩张问题. 若 $\{A_j\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个基, 则 $\omega=\sum\omega^jA_j$, 其中每个 ω^j 都是通常的 1 形式. 因而只需考虑 U 上通常 1 形式的扩张问题就行了. 令 $x^1,\cdots,x^n$ 是 U 上的一个局部坐标系, 那么 U 上的每个 1 形式都具有 $\sum f_idx^i$ 的形式, 其中每个 f_i 都是 U 上的函数. 这样以来, 问题就归结为 U 上的函数的扩张问题. 于是引理 2 即可从引理 1 得出.

由引理 2, 则定理 2.1 正好可以用跟第一章定理 5.7 同样的方式来证明. 令 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 M 的一个局部有限的开覆盖且使得每个 U_i 都具有引理 2 中所述的性质. 令 $\{V_i\}$ 是 $\{U_i\}$ 的一个开加细使得 $\bar{V}_i \subset U_i$. 对 I 的每个子集 J, 置 $S_J = \bigcup_{i\in J} \bar{V}_i$. 令 T 是二元组 (τ, J) 的集合, 其中 $J \subset I$, τ 是一个在 S_J 上定义的联络而且与在 $A \cap S_J$ 上给定的联络一致. 在 T 中引进一个序关系如下: 当 $J' \subset J''$ 且在 $S_{J'}$ 上 $\tau' = \tau''$ 时 $(\tau', J') < (\tau'', J'')$. 令 (τ, J) 是 T 的一个极大元, 那么正如在第一章定理 5.7 的证明中那样 $J = I$ 而且 τ 就是所要求的联络.　证毕.

评注　利用引理 2 和从属于 $\{V_i\}$ 的单位分解 $\{f_i\}$(参看附录 3) 来证明定理 2.1 是可行的. 令 ω_i 是 $\pi^{-1}(U_i)$ 上的联络形式, 它能扩张 $A \cap \bar{V}_i$ 上给定的联络. 那么 $\omega = \sum_i g_i\omega_i$ 就是所要求的 P 上的联络形式, 其中每个 g_i 是由 $g_i = f_i \circ \pi$ 定义的 P 上的函数.

2.3 平　行　性

在主纤维从 $P(M, G)$ 上给定了一个联络 Γ, 我们将要定义纤维沿着底流形 M 上任何给定曲线 τ 的平行移动的概念.

令 $\tau = x_t(a \leqslant t \leqslant b)$ 是 M 上的一条分段 C^1 可微曲线. τ 的水平提升 (简称提升) 是 P 中的一条水平曲线 $\tau^* = u_t(a \leqslant t \leqslant b)$ 使得对于 $a \leqslant t \leqslant b$, $\pi(u_t) = x_t$. 在这里 P 中的水平曲线是指一条 C^1 分段可微曲线, 它的切向量全都是水平的.

曲线提升的概念是与向量场提升的概念相对应的. 实际上, 若 X^* 是 M 上的向量场 X 的提升, 那么 X^* 过一点 $u_0 \in P$ 的积分曲线是 X 过点 $x_0 = \pi(u_0) \in M$ 的积分曲线的提升. 现在来证明

命题 3.1　令 $\tau = x_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是 M 上的一条 C^1 曲线. 对 P 的满足 $\pi(u_0) = x_0$ 的任意一点 u_0, 都存在从 u_0 出发的 τ 的唯一一个提升 $\tau^* = u_t$.

证明　由从的局部平凡性, 在 P 中有一条 C^1 曲线 v_t 使得 $v_0 = u_0$ 而且对于 $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\pi(v_t) = x_t$. τ 的提升如果存在, 则必定具有 $u_t = v_t a_t$ 的形式, 其中 a_t 是结构群 G 中的一条曲线且使得 $a_0 = e$. 现在我们要在 G 中寻求一条曲线 a_t, 它使 $u_t = v_t a_t$ 成为一条水平曲线. 正如在命题 1.4 的证明中那样, 把 Leibniz 公式 (第一章命题 1.4) 应用于将 (v, a) 映为 va 的映射 $P \times G \to P$, 则得

$$\dot{u}_t = \dot{v}_t a_t + v_t \dot{a}_t,$$

其中每个上面加点的字母表示该点的切向量 (例如, $\dot{u}_t$ 是曲线 $\tau^* = u_t$ 在 u_t 点的切向量). 令 ω 是 Γ 的联络形式, 则像在命题 1.4 的证明中那样有

$$\omega(\dot{u}_t) = \mathrm{ad}(a_t^{-1})\omega(\dot{v}_t) + a_t^{-1}\dot{a}_t,$$

其中 $a_t^{-1}\dot{a}_t$ 是 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}=T_e(G)$ 中的一条曲线. 曲线 u_t 是水平的当且仅当对每个 t, $\dot{a}_t a_t^{-1}=-\omega(\dot{v}_t)$. 从而 u_t 的构造归结为下列引理. 证毕.

引理 令 G 是一个 Lie 群, 且 $\mathfrak{g}$ 是它的等同于 $T_e(G)$ 的 Lie 代数. 令 $Y_t(0\leqslant t\leqslant 1)$ 是 $T_e(G)$ 中的一条连续曲线. 那么在 G 中存在唯一的一条 C^1 曲线 a_t 使得 $a_0=e$ 而且对于 $0\leqslant t\leqslant 1$, $\dot{a}_t a_t^{-1}=Y_t$.

评注 在 $Y_t=A$ 对所有 t 成立的情况下, 曲线 a_t 无非就是由 A 生成的 G 的单参数子群. 因而微分方程 $\dot{a}_t a_t^{-1}=Y_t$ 是对单参数子群的微分方程的推广.

引理的证明 我们可以假设对所有 $t(-\infty<t<\infty)$, Y_t 都有定义而且连续. 在 $G\times\mathbf{R}$ 上定义一个向量场 X 如下. 由定义, X 在 $(a,t)\in G\times\mathbf{R}$ 点的值等于 $(Y_t a,(d/dz)_t)\in T_a(G)\times T_t(\mathbf{R})$, 其中 z 是 $\mathbf{R}$ 的自然坐标系. 显然从 $(e,0)$ 出发的 X 的积分曲线具有 (a_t,t) 的形式而且 a_t 就是所要求的 G 中的曲线. 唯一需要证明的是 a_t 对所有 $t\in[0,1]$ 都有定义. 令 $\varphi_t=\exp tX$ 是由 X 生成的 $G\times\mathbf{R}$ 的局部单参数变换群. 对于每个 $(e,s)\in G\times\mathbf{R}$ 都有一个正数 δ_s 使得 $\varphi_t(e,r)$ 对于 $|r-s|<\delta_\varepsilon$ 和 $|t|<\delta_s$ 有定义 (第一章命题 1.5). 因为 $G\times\mathbf{R}$ 的子集 $\{e\}\times[0,1]$ 是紧的, 因而可以选取 $\delta>0$ 使得对于每个 $r\in[0,1]$, $\varphi_t(e,r)$ 对 $|t|<\delta$ 有定义 (参看第一章命题 1.6 的证明). 选取 $s_0,s_1,\cdots,s_k$ 使得 $0=s_0<s_1<\cdots<s_k=1$ 而且对于每个 i, $s_i-s_{i-1}<\delta$. 那么 $\varphi_t(e,0)=(a_t,t)$ 对于 $0\leqslant t\leqslant s_1$ 有定义; $\varphi_u(e,s_1)=(b_u,u+s_1)$ 对于 $0\leqslant u\leqslant s_2-s_1$ 有定义, 其中 $\dot{b}_u b_u^{-1}=Y_{u+s_1}$; 而且对 $s_1\leqslant t\leqslant s_2$ 定义 $a_t=b_{t-s_1}a_{s_1};\cdots$; 对 $0\leqslant u\leqslant s_k-s_{k-1}$, $\varphi_u(e,s_{k-1})=(c_u,s_{k-1}+u)$ 有定义, 其中 $\dot{c}_u c_u^{-1}=Y_{u+s_{k-1}}$, 再定义 $a_t=c_{t-s_{k-1}}a_{s_{k-1}}$. 这样就对 $0\leqslant t\leqslant 1$ 完成了 a_t 的构造. 证毕.

现在我们用命题 3.1 定义纤维的平移如下. 令 $\tau=x_t(0\leqslant t\leqslant 1)$ 是 M 上的一条 C^1 可微曲线. 令 u_0 是 P 的适合 $\pi(u_0)=x_0$ 的任一点. τ 的经过 u_0 的唯一提升 τ^* 有终点 u_1 使得 $\pi(u_1)=x_1$. 通过在纤维 $\pi^{-1}(x_0)$ 中改变 u_0, 就可得到一个从纤维 $\pi^{-1}(x_0)$ 到纤维 $\pi^{-1}(x_1)$ 的映射将 u_0 映射为 u_1. 用同一字母 τ 表示这个映射并且称之为沿曲线 τ 的平移. $\tau:\pi^{-1}(x_0)\to\pi^{-1}(x_1)$ 实际上是一个同构, 这个事实可从下列命题得出.

命题 3.2 沿任何曲线 τ 的平移与 G 在 P 上的作用可交换, 即对每个 $a\in G$, $\tau\circ R_a=R_a\circ\tau$.

证明 本命题的结论可从每条水平曲线均被 R_a 映射成水平曲线这一事实得出. 证毕.

沿任何 C^1 分段可微曲线的平移可以用明显的方式来定义. 需要说明的是沿一曲线的平移不依赖于按下列意义使用的特定参数表示 x_t. 考虑 M 上的两条参数曲线 $x_t(a\leqslant t\leqslant b)$ 和 $y_s(c\leqslant s\leqslant d)$. 若有从 $[a,b]$ 到 $[c,d]$ 的同胚 φ 使得: (1) $\varphi(a)=c$ 且 $\varphi(b)=d$, (2) 除有限个参数值外, φ 和 φ^{-1} 都是 C^1 可微的, (3) 对所有 $t\in[a,b]$,

$y_{\varphi(t)} = x_t$, 那么沿 x_t 的平移和沿 y_s 的平移是一致的.

如果 τ 是曲线 $x_t(a \leqslant t \leqslant b)$, 那么就用 τ^{-1} 表示由 $y_t = x_{a+b-t}$ 定义的曲线 $y_t(a \leqslant t \leqslant b)$. 下列命题是明显的.

命题 3.3 (a) 如果 τ 是 M 上的分段 C^1 可微曲线, 那么沿 τ^{-1} 的平移是沿 τ 平移的逆.

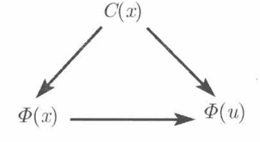
(b) 如果 τ 是 M 上从 x 到 y 的曲线且 μ 是 M 上从 y 到 z 的曲线, 那么沿复合曲线 $\mu \cdot \tau$ 的平移是沿 τ 和 μ 平移的复合.

2.4 和乐群

现在我们利用平行移动的概念来定义主纤维丛 $P(M,G)$ 上一个给定联络 Γ 的和乐群. 为了简单起见, 我们将总是用“曲线”一词来表示分段 $C^k(1 \leqslant k \leqslant \infty)$ 可微曲线 (贯穿 2.4 节, k 始终被固定).

对 M 的每一点 x, 用 $C(x)$ 表示 x 点的圈空间, 即所有起始于 x 并且终止于 x 的闭曲线的集合. 如果 τ 和 μ 是 $C(x)$ 的元素, 那么复合曲线 $\mu \cdot \tau(\mu$ 续接于 $\tau)$ 也是 $C(x)$ 中的元素. 正如 2.3 节中所证明的, 对于每个 $\tau \in C(x)$, 沿 τ 的平移都是纤维 $\pi^{-1}(x)$ 到其自身的同构. 根据命题 3.3, $\pi^{-1}(x)$ 到其自身的所有这种同构的集合成为一个群. 我们将这个群称为 Γ 关于基点 x 的和乐群. 令 $C^0(x)$ 是由同伦于零的圈组成的 $C(x)$ 的子集. 沿所有 $\tau \in C^0(x)$ 产生的平移组成的和乐群的子群称为 Γ 关于基点 x 的限制和乐群. 分别用 $\Phi(x)$ 和 $\Phi^0(x)$ 表示 Γ 关于基点 x 的和乐群与限制和乐群.

以下列方式将这些群视为结构群 G 的子群将是方便的. 令 u 是纤维 $\pi^{-1}(x)$ 的任一固定点. 每个 $\tau \in C(x)$ 决定 G 的一个元素 a 使得 $\tau(u) = ua$. 若圈 $\mu \in C(x)$ 决定 $b \in G$, 那么复合圈 $\mu \cdot \tau$ 决定 ba, 因为根据命题 3.2, $(\mu \cdot \tau)(u) = \mu(ua) = (\mu(u))a = uba$. 由命题 3.3, 所有 $\tau \in C(x)$ 决定的元素 $a \in G$ 的集合形成 G 的一个子群, 这个子群称为 Γ 关于基点 $u \in P$ 的和乐群并记为 $\Phi(u)$. 可相应地定义 Γ 关于基点 u 的限制和乐群 $\Phi^0(u)$. 请注意到 $\Phi(x)$ 是纤维 $\pi^{-1}(x)$ 到其自身的同构群而 $\Phi(u)$ 是 G 的子群. 显然有从 $\Phi(x)$ 到 $\Phi(u)$ 的唯一一个同构使下列图表交换:



定义 $\Phi(u)$ 的另一种方法是：当 P 的两点 u 和 v 能用水平曲线连接时, 则写成 $u \sim v$. 这显然是一个等价关系. 那么 $\Phi(u)$ 是使得 $u \sim ua$ 的 $a \in G$ 的集合. 对

于任何 $u, v \in P$ 和 $a \in G$, $u \sim v$ 蕴涵着 $ua \sim va$, 利用这个事实容易再次验证 G 的这个子集形成 G 的一个子群.

命题 4.1 (a) 如果 $v = ua (a \in G)$, 那么 $\Phi(v) = \mathrm{ad}(a^{-1})(\Phi(u))$, 即和乐群 $\Phi(v)$ 和 $\Phi(u)$ 是在 G 中共轭的. 类似地, $\Phi^0(v) = \mathrm{ad}(a^{-1})(\Phi^0(u))$.

(b) 若 P 的两点 u 和 v 能用水平曲线连接, 那么 $\Phi(u) = \Phi(v)$ 且 $\Phi^0(u) = \Phi^0(v)$.

证明 (a) 令 $b \in \Phi(u)$ 使得 $u \sim ub$, 那么 $ua \sim (ub)a$ 因而 $v \sim (va^{-1})ba = va^{-1}ba$. 从而 $\mathrm{ad}(a^{-1})(b) \in \Phi(v)$. 由此易得 $\Phi(v) = \mathrm{ad}(a^{-1})(\Phi(u))$. 对于 $\Phi^0(v) = \mathrm{ad}(a^{-1})(\Phi^0(u))$ 的证明是类似的.

(b) 关系 $u \sim v$ 蕴涵着对每个 $b \in G$, $ub \sim vb$. 因为关系 $\sim$ 是传递的, 所以 $u \sim ub$ 当且仅当 $v \sim vb$, 即 $b \in \Phi(u)$ 当且仅当 $b \in \Phi(v)$. 为证明 $\Phi^0(u) = \Phi^0(v)$, 令 μ^* 是 P 中从 u 到 v 的一条水平曲线. 若 $b \in \Phi^0(u)$, 则在 P 中有一条从 u 到 ub 的水平曲线 τ^* 使得 M 中的曲线 $\pi(\tau^*)$ 是在 $\pi(u)$ 点同伦于零的圈. 那么复合 $(R_b\mu^*) \cdot \tau^* \cdot \mu^{*-1}$ 是 P 中从 v 到 vb 的水平曲线而且它在 M 上的射影是在 $\pi(v)$ 同伦于零的一个圈. 因而 $b \in \Phi^0(v)$. 类似地, 若 $b \in \Phi^0(v)$, 那么 $b \in \Phi^0(u)$. 证毕.

如果 M 是连通的, 那么对于 P 的每一个点对 u 和 v 都有一个元素 $a \in G$ 使得 $v \sim ua$. 由命题 4.1 可知, 若 M 是连通的, 那么和乐群 $\Phi(u) (u \in P)$ 在 G 中是相互共轭的, 因而相互同构.

本节的剩余部分将全部用来证明和乐群是 Lie 群这一事实.

命题 4.2 令 $P(M.G)$ 是一个主纤维丛, 其底流形 M 是连通的和仿紧的. 令 $\Phi(u)$ 和 $\Phi^0(u) (u \in P)$ 是联络 Γ 关于基点 u 的和乐群和限制和乐群. 那么

(a) $\Phi^0(u)$ 是 G 的连通 Lie 子群;

(b) $\Phi^0(u)$ 是 $\Phi(u)$ 的正规子群, 而且 $\Phi(u)/\Phi^0(u)$ 是可数的.

根据这个定理, $\Phi(u)$ 是 G 的一个 Lie 子群而且它的单位分支是 $\Phi^0(u)$.

证明 我们将要证明 $\Phi^0(u)$ 的每个元素都能用 G 中的分段 C^k 可微曲线连接到单位元而且此曲线在 $\Phi^0(u)$ 中. 于是由附录 4 中的定理可知, $\Phi^0(u)$ 是 G 的一个连通 Lie 子群. 证毕.

令 $a \in \Phi^0(u)$ 是通过沿一个同伦于 0 的分段 C^k 可微的圈 τ 平移而得到的. 由因子分解引理 (附录 7), τ 是 (等价于) 形如 $\tau_1^{-1} \cdot \mu \cdot \tau_1$ 的小套索的积, 其中 τ_1 是从 $x = \pi(u)$ 到某一点 y 的分段 C^k 可微曲线而 μ 是 y 点处的一个可微圈并且位于 y 点的一个坐标邻域内. 只需证明由每个套索 $\tau_1^{-1} \cdot \mu \cdot \tau_1$ 定义的 $\Phi^0(u)$ 的元素能够连接到单位元就行了. 这个元素显然等于由圈 μ 定义的 $\Phi^0(v)$ 的元素, 其中 v 是由 u 沿 τ_1 平移而得到的点. 因此只需证明由可微圈 μ 定义的元素 $b \in \Phi^0(v)$ 能够用 G 的一条位于 $\Phi^0(v)$ 中的可微曲线连接到 $\Phi^0(v)$ 的单位元即可.

令 $x^1, \cdots, x^n$ 是以 y 为原点的局部坐标系而且 μ 是由 $x^i = x^i(t) (i = 1, \cdots, n)$ 定义的. 对于 $i = 1, \cdots, n$ 和 $0 \leqslant t, s \leqslant 1$ 置 $f^i(t, s) = s + (1 - s)x^i(t)$, 那么

$f(t,s)=(f^1(t,s),\cdots,f^n(t,s))$ 是从 $I\times I$ 到 M 的 C^k 可微映射 (其中 $I=[0,1]$) 且使得 $f(t,0)$ 为曲线 μ 而 $f(t,1)$ 为平凡曲线 y. 对每个固定的 s, 令 $b(s)$ 是从圈 $f(t,s)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 得到的 $\Phi^0(v)$ 的元素, 因而 $b(0)=b$, $b(1)=$ 单位元. $b(s)$ 关于 s(作为从 I 到 G 的映射) 是 C^k 的, 这一事实可从下列引理得出.

引理　令 $f:I\times I\to M$ 是一个 C^k 可微映射而 $u_0(s)(0\leqslant s\leqslant 1)$ 是 P 中的一条 C^k 可微曲线使得 $\pi(u_0(s))=f(0,s)$. 对于每个固定的 s, 令 $u_1(s)$ 是由 $u_0(s)$ 沿曲线 $f(t,s)(0\leqslant t\leqslant 1, s$ 固定) 平移而得到的点, 那么曲线 $u_1(s)(0\leqslant s\leqslant 1)$ 是 C^k 可微的.

引理的证明　令 $F:I\times I\to P$ 是一个 C^k 可微映射使得对所有 $(t,s)\in I\times I$, $\pi(F(t,s))=f(t,s)$ 并且 $F(0,s)=u_0(s)$. 这种 F 的存在性可由从 P 的局部平凡性得出, 置 $v_t(s)=F(t,s)$. 从命题 3.1 的证明看出对于每个固定的 s, 在 G 中有一条曲线 $a_t(s)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 使得 $a_0(s)=e$ 而且曲线 $v_t(s)a_t(s)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 是水平的. 置 $u_t(s)=v_t(s)a_t(s)$. 为证明 $u_1(s)(0\leqslant s\leqslant 1)$ 是一条 C^k 可微曲线, 只需证明 $a_1(s)(0\leqslant s\leqslant 1)$ 是 G 中的 C^k 可微曲线. 令 ω 是 Γ 的联络形式. 置 $Y_t(s)=-\omega(\dot v_t(s))$, 其中 $\dot v_t(s)$ 是当 s 固定时由 $v_t(s)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 所描绘的曲线的切向量. 那么正如在命题 3.1 的证明中那样, $a_t(s)$ 是方程 $\dot a_t(s)a_t(s)^{-1}=Y_t(s)$ 的解. 像在命题 3.1 的引理的证明中那样, 对于每个固定的 s, 在 $G\times\mathbf{R}$ 上定义一个向量场 $X(s)$ 使得 $(a_t(s),t)$ 是向量场 $X(s)$ 过点 $(e,0)\in G\times\mathbf{R}$ 的积分曲线. $a_t(s)$ 对于 s 的可微性可从下列事实得出. 带参数 s 的线性常微分方程的每一个解对 s 是可微的且可微的次数等于方程的阶数 (参看附录 1). 这就完成了引理的证明从而也就完成了定理 4.2(a) 款的证明.

现在来证明 (b) 款. 若 τ 和 μ 是 x 点处的两个圈且 μ 同伦于零, 那么复合曲线 $\tau\cdot\mu\cdot\tau^{-1}$ 同伦于零. 这就蕴涵着 $\Phi^0(u)$ 是 $\Phi(u)$ 的正规子群. 令 $\pi_1(M)$ 是以 x 为基点的 M 的第一同伦群. 定义同态 $f:\pi_1(M)\to\Phi(u)/\Phi^0(u)$ 如下. 对 $\pi_1(M)$ 的每个元素 α, 令 τ 是 x 点的一个连续圈, 它表示 α, 我们可以用有限个坐标邻域覆盖 τ, 并在每个邻域内修改 τ 而在 x 点处得到一个同伦于 τ 的分段 C^k 可微的圈 τ_1. 如果 τ_1 和 τ_2 是两个这样的圈, 那么 $\tau_1\cdot\tau_2^{-1}$ 同伦于零并且定义 $\Phi^0(u)$ 的一个元素. 因而 τ_1 和 τ_2 定义 $\Phi(u)/\Phi^0(u)$ 的同一个元素, 将它记为 $f(\alpha)$. 显然, f 是从 $\pi_1(M)$ 到 $\Phi(u)/\Phi^0(u)$ 的同态. 因为 M 是连通的和仿紧的, 所以它满足第二可数公理 (附录 3). 由此易知 $\pi_1(M)$ 是可数的, 从而 $\Phi(u)/\Phi^0(u)$ 也是可数的.　证毕.

评注　在 2.3 节中我们定义了沿任何分段 C^1 可微曲线的平移, 本节又用分段 C^k 可微曲线定义了和乐群 $\Phi(u)$. 若以 $\Phi_k(u)$ 表示这样从分段 C^k 可微曲线得出的和乐群, 那么显然有 $\Phi_1(u)\supset\Phi_2(u)\supset\cdots\supset\Phi_\infty(u)$. 以后在 2.7 节我们将证明所有这些和乐群都是相同的.

2.5 曲率形式和结构方程

令 $P(M,G)$ 是一个主纤维丛且 ρ 是 G 在有限维向量空间 V 上的表示; 对每个 $a\in G$, $\rho(a)$ 是 V 上的一个线性变换而且对 $a,b\in G$, $\rho(ab)=\rho(a)\rho(b)$. P 上的 (ρ,V) 型 r 次伪张量形式是 P 上的 V 值 r 形式 φ 使得

$$R_a^*\varphi=\rho(a^{-1})\cdot\varphi,\ a\in G.$$

这样一个形式 φ, 如果在下述意义上是水平的, 则称它是一个张量形式, 若 P 的切向量 X_i 中至少有一个是垂直的, 即切于某一纤维, 则 $\varphi(X_1,\cdots,X_r)=0$.

例 5.1 如果 ρ_0 是 G 在 V 上的平凡表示, 即对每个 $a\in G$, $\rho_0(a)$ 是 V 的恒等变换, 那么一个 (ρ_0,V) 型 r 次张量形式无非就是 P 上的一个能表示成 $\varphi=\pi^*\varphi_M$ 的形式, 其中 φ_M 是底流形 M 上的一个 V 值 r 形式.

例 5.2 令 ρ 是 G 在 V 上的一种表示, E 是伴随于 P 的以 V 为标准纤维的从, 而且 G 通过 ρ 作用于 V 上. 一个 (ρ,V) 型 r 次张量形式 φ 可以看作是一种指派, 它对每个 $x\in M$ 指定一个从 $T_x(M)\times\cdots\times T_x(M)$($r$ 次积) 到向量空间 $\pi_E^{-1}(x)$ 的斜对称多重线性映射 $\tilde{\varphi}_x$, 其中 $\pi_E^{-1}(x)$ 是 E 在 x 上的纤维. 即定义

$$\tilde{\varphi}_x(X_1,\cdots,X_r)=u(\varphi(X_1^*,\cdots,X_r^*)),\quad X_i\in T_x(M),$$

其中 u 是 P 的任何一个适合 $\pi(u)=x$ 的点且 X_i^* 是 u 点处使得 $\pi(X_i^*)=X_i$ 对每个 i 成立的任何向量. 那么 $\varphi(X_1^*,\cdots,X_r^*)$ 是标准纤维 V 的一个元素而且 u 是从 V 到 $\pi_E^{-1}(x)$ 的线性映射因而 $u(\varphi(X_1^*,\cdots,X_r^*))$ 是 $\pi_E^{-1}(x)$ 的元素. 容易验证该元素不依赖于 u 和 X_i^* 的选取. 反过来, 对每个 $x\in M$, 给定一个斜对称多重线性映射 $\tilde{\varphi}_x:T_x(M)\times\cdots\times T_x(M)\to\pi_E^{-1}(x)$, 则 P 上的 (ρ,V) 型 r 次张量形式 φ 可定义为

$$\varphi(X_1^*,\cdots,X_r^*)=u^{-1}(\tilde{\varphi}_x(\pi(X_1^*),\cdots,\pi(X_r^*))),\quad X_r^*\in T_u(P),$$

其中 $x=\pi(u)$. 特别, 一个 (ρ,V) 型 0 次张量形式, 即一个使得 $f(ua)=\rho(a^{-1})f(u)$ 的函数 $f:P\to V$, 可以等同于一个截面 $M\to E$.

例 5.2 的几种特殊情况将在第三章中用到.

令 Γ 是 $P(M,G)$ 上的一个联络. 令 G_u 和 Q_u 分别是 $T_u(P)$ 的垂直子空间和水平子空间. 令 $h:T_u(P)\to Q_u$ 是投影.

命题 5.1 如果 φ 是 P 上的一个 (ρ,V) 型伪张量 r 形式, 那么

(a) 由 $(\varphi h)(X_1,\cdots,X_r)=\varphi(hX_1,\cdots,hX_r)(X_r\in T_u(P))$ 定义的形式 φh 是 (ρ,V) 型张量形式;

(b) $d\varphi$ 是 (ρ, V) 型伪张量 $(r+1)$ 形式;

(c) 由 $D\varphi = (d\varphi)h$ 定义的 $(r+1)$ 形式 $D\varphi$ 是 (ρ, V) 型张量形式.

证明　由 $R_a \circ h = h \circ R_a (a \in G)$ 可知 φh 是 (ρ, V) 型伪张量形式. 显然, 若诸 X_i 之一是垂直的, 则

$$(\varphi h)(X_1, \cdots, X_r) = 0.$$

(b) 从 $R_a^* \circ d = d \circ R_a^* (a \in G)$ 得出. (c) 从 (a) 和 (b) 得出.　证毕.

我们把形式 $D\varphi = (d\varphi)h$ 称为 φ 的外协变导数, 将 D 称为外协变微分.

若 ρ 是 G 在 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 中的伴随表示, 则称 $(\rho, \mathfrak{g})$ 型 (伪) 张量形式是 $\mathrm{ad}G$ 型的. 联络形式 ω 是一个 $\mathrm{ad}G$ 型的伪张量 1 形式. 由命题 5.1, $D\omega$ 是一个 $\mathrm{ad}G$ 型张量 2 形式并且称之为 ω 的曲率形式.

命题 5.2(结构方程)　令 ω 是一个联络形式且 Ω 是它的曲率形式. 那么对于 $X, Y \in T_u(P)$, $u \in P$,

$$d\omega(X, Y) = -\frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X, Y).$$

证明　P 的每个向量都是一个垂直向量与一个水平向量之和. 由于上面的等式两边对于 X 和 Y 是双线性的和斜对称的, 所以只需要在下列三种特殊情况下来验证等式就行了.

(1) X 和 Y 都是水平的. 在这种情况下, $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ 并且等式归结为 Ω 的定义.

(2) X 和 Y 都是垂直的. 在 u 点处令 $X = A^*, Y = B^*$, 其中 $A, B \in \mathfrak{g}$. 这时 A^* 和 B^* 分别是对应于 A 和 B 的基本向量场. 由第一章命题 3.11 得

$$\begin{aligned} 2d\omega(A^*, B^*) =& A^*(\omega(B^*)) - B^*(\omega(A^*)) - \omega([A^*, B^*]) \\ =& -[A, B] = -[\omega(A^*), \omega(B^*)], \end{aligned}$$

这是因为 $\omega(A^*) = A$, $\omega(B^*) = B$ 且 $[A^*, B^*] = [A, B]^*$. 另一方面 $\Omega(A^*, B^*) = 0$.

(3) X 是水平的而 Y 是垂直的. 将 X 扩张成 P 上的水平向量并且仍然将它记为 X. 在 u 点处令 $Y = A^*$, 其中 $A \in \mathfrak{g}$. 因为等式的右边为零, 所以只需证明 $d\omega(X, A^*) = 0$. 由第一章命题 3.11 得

$$\begin{aligned} 2d\omega(X, A^*) &= X(\omega(A^*)) - A^*(\omega(X)) - \omega([X, A^*]) \\ &= -\omega([X, A^*]). \end{aligned}$$

于是只需证明下列引理即可.　证毕.

引理　若 A^* 是对应于元素 $A \in \mathfrak{g}$ 的基本向量场且 X 是一个水平向量场, 那么 $[X, A^*]$ 是水平的.

引理的证明　基本向量场 A^* 是由 R_{a_t} 诱导的, 其中 a_t 是由 $A \in \mathfrak{g}$ 生成的 G 的单参数子群. 由第一章命题 1.9 得到

$$[X, A^*] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[R_{a_t}(X) - X].$$

若 X 是水平的, 那么 $R_{a_t}(X)$ 也是水平的. 因而 $[X, A^*]$ 是水平的.　证毕.

推论 5.3　如果 X 和 Y 都是 P 上的水平向量场, 那么

$$\omega([X, Y]) = -2\omega(X, Y).$$

证明　将第一章命题 1.9 应用于刚才证明的结构方程的左边.　证毕.

为了简单起见, 有时将结构方程 (常常称之为 E.Cartan 结构方程) 写成下列形式:

$$d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega] + \Omega.$$

令 $e_1, \cdots, e_r$ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的基而 $c^i_{jk}(i, j, k = 1, \cdots, r)$ 是 $\mathfrak{g}$ 关于 $e_1, \cdots, e_r$ 的结构常数, 即

$$[e_j, e_k] = \sum_i c^i_{jk} e_i, \quad j, k = 1, \cdots, r.$$

令 $\omega = \sum_i \omega^i e_i$, $\Omega = \sum_i \Omega^i e_i$, 那么结构方程能够表示成下列形式:

$$d\omega^i = -\frac{1}{2}\sum_{j \cdot k} c^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k + \Omega^i, \quad i = 1, \cdots, r.$$

定理 5.4(Bianchi 恒等式)　$D\Omega = 0$.

证明　由 D 的定义, 只需证明当 X, Y, Z 都是水平向量时 $d\Omega(X, Y, Z) = 0$ 即可. 将外微分算子 d 应用于结构方程就有

$$0 = dd\omega^i = -\frac{1}{2}\sum c^i_{jk} d\omega^j \wedge \omega^k + \frac{1}{2}\sum c^i_{jk}\omega^j \wedge d\omega^k + d\Omega^i.$$

因为当 X 为水平向量时 $\omega^i(X) = 0$, 所以当 X, Y, Z 都是水平向量时就有

$$d\Omega^i(X, Y, Z) = 0.\quad \text{证毕.}$$

命题 5.5　令 ω 是一个联络形式而 φ 是一个 ad$G$ 型张量 1 形式. 那么对于 $X, Y \in T_u(P)$, $u \in P$,

$$D\varphi(X, Y) = d\varphi(X, Y) + \frac{1}{2}[\varphi(X), \omega(Y)] + \frac{1}{2}[\omega(X), \varphi(Y)].$$

证明　如同命题 5.2 的证明那样, 只需考虑三种特殊情况就够了. 仅有的非平凡情形是 X 为垂直的而 Y 为水平的. 在 u 点令 $X = A^*$, 其中 $A \in \mathfrak{g}$. 将 Y 扩张成

P 上的水平向量场, 并且仍然记为 Y, 它在 $R_a(a \in G)$ 作用下是不变的. (首先把向量 πY 扩张成 M 上的向量场, 然后将它提升为 P 上的向量场.) 那么 $[A^*, Y] = 0$. 由于 A^* 是垂直的, 所以 $D\varphi(A^*, Y) = 0$. 我们将证明等式右边为零. 由第一章命题 3.11 得

$$d\varphi(A^*, Y) = \frac{1}{2}(A^*(\varphi(Y)) - Y(\varphi(A^*)) - \varphi([A^*, Y])) = \frac{1}{2}A^*(\varphi(Y)).$$

因而只需证明 $A^*(\varphi(Y)) + [\omega(A^*), \varphi(Y)] = 0$ 或 $A^*(\varphi(Y)) = -[A, \varphi(Y)]$ 即可. 若用 a_t 表示由 A 生成的 G 的单参数子群, 则有

$$\begin{aligned} A_u^*(\varphi(Y)) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi_{ua_t}(Y) - \varphi_u(Y)] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(R_{a_t}^*\varphi)_u(Y) - \varphi_u(Y)] \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\mathrm{ad}(a_1^{-1})(\varphi_u(Y)) - \varphi_u(Y)] = -[A, \varphi_u(Y)], \end{aligned}$$

因为 Y 是经 R_{a_t} 作用不变的.　证毕.

2.6　联络的映射

在第一章 1.5 节中曾考虑过从一个主纤维丛到另一个主纤维丛的某些映射, 例如同态、内射以及丛映射等. 现在我们来研究这些映射在联络上的作用.

命题 6.1　令 $f: P'(M', G') \to P(M, G)$ 是一个同态, 连同相应同态 $f: G' \to G$ 使得诱导映射 $f: M' \to M$ 是从 M' 到 M 的微分同胚. 令 Γ' 是 P' 上的联络, ω' 是 Γ' 的联络形式且 Ω' 是 Γ' 的曲率形式. 那么

(a) 在P上有唯一的联络Γ 使得Γ'的水平子空间被 f 映射为 Γ 的水平子空间.

(b) 如果 ω 和 Ω 分别是 Γ 的联络形式和曲率形式, 那么 $f^*\omega = f \cdot \omega'$ 且 $f^*\Omega = f \cdot \Omega'$, 这里 $f \cdot \omega'$ 或 $f \cdot \Omega'$ 是指由 $(f \cdot \omega')(X') = f(\omega'(X'))$ 或 $(f \cdot \Omega')(X', Y') = f(\Omega'(X', Y'))$ 定义的 P' 上的 $\mathfrak{g}'$ 值形式, 其中右边的 f 是由 $f: G' \to G$ 诱导的同态 $\mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$.

(c) 若 $u' \in P'$, $u = f(u') \in P$, 那么 $f: G' \to G$ 把 $\Phi(u')$ 映射到 $\Phi(u)$ 上并且把 $\Phi^0(u')$ 映射到 $\Phi^0(u)$ 上, 这里 $\Phi(u)$ 和 $\Phi^0(u)$(相应地 $\Phi(u')$ 和 $\Phi^0(u')$) 是 $\Gamma(\Gamma')$ 关于基点 $u(u')$ 的和乐群与限制和乐群..

证明　(a) 给定一点 $u \in P$, 选取 $u' \in P'$ 和 $a \in G$ 使得 $u = f(u')a$. 用 $Q_u = R_a \circ f(Q_{u'})$ 定义 $T_u(P)$ 的水平子空间 Q_u, 其中 $Q_{u'}$ 是 $T_{u'}(P')$ 关于 Γ' 的水平子空间. 我们将证明 Q_u 不依赖于 u' 和 a 的选取. 如果 $u = f(v')b$, 其中 $v' \in P'$, $b \in G$, 那么 $v' = u'c'$ 对某个 $c' \in G'$ 成立. 若置 $c = f(c')$, 那么 $u = f(v')b = f(u'c')b = f(u')cb$, 因此 $a = cb$. 于是有 $R_b \circ f(Q_{v'}) = R_b \circ f(Q_{u'c'}) =$

$R_b \circ f \circ R_{c'}(Q_{u'}) = R_b \circ R_c \circ f(Q_{u'}) = R_a \circ f(Q_{u'})$, 这证明我们的论断成立. 现在证明分布 $u \to Q_u$ 是 P 上的联络. 如果 $u = f(u')a$, 那么 $ub = f(u')ab$ 且 $Q_{ub} = R_{ab} \circ f(Q_{u'}) = R_b \circ R_a \circ f(Q_{u'}) = R_b(Q_u)$, 因而证明了分布在 G 作用下的不变性. 再来证明 $T_u(P) = Q_u + G_u$, 其中 G_u 是纤维在 u 点的切空间. 由 P 的局部平凡性, 只要证明投影 $\pi : P \to M$ 诱导一个线性同构 $\pi : Q_u \to T_x(M)$(其中 $x = \pi(u)$) 就行了. 因为分布 $u \to Q_u$ 经 G 作用不变, 因而可以假设 $u = f(u')$. 在交换图表

$$\begin{array}{ccc} Q_{u'} & \xrightarrow{f} & Q_u \\ \downarrow{\scriptstyle \pi'} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ T_{x'}(M') & \xrightarrow{f} & T_x(M) \end{array}$$

中, 映射 $\pi' : Q_{u'} \to T_{x'}(M')$ 和 $f : T_{x'}(M') \to T_x(M)$ 都是线性同构, 因而剩余的两个映射必然也是线性同构. 由 Γ 的构造, 其唯一性是明显的.

(b) 等式 $f^*\omega = f \cdot \omega'$ 也可以写成下列形式:

$$\omega(fX') = f(\omega'(X')), \quad X' \in T_{u'}(P'), \quad u' \in P'.$$

只需在 (1)X' 是水平的、(2) X' 是垂直的这两种特殊情况下验证上面的等式就行了. 因为 $f : P' \to P$ 把每一个水平向量映射成水平向量, 所以若 X' 是水平的, 那么等式两边为零. 如果 X' 是垂直的, 则在 u' 点处 $X' = A^*$, 其中 $A' \in \mathfrak{g}$. 置 $A = f(A') \in \mathfrak{g}$. 因为对每个 $a' \in G'$, $f(u'a') = f(u')f(a')$, 所以在 $f(u')$ 处有 $f(X') = A^*$. 因而

$$\omega(fX') = \omega(A^*) = A = f(A') = f(\omega'(A'^*)) = f(\omega'(X')).$$

从 $f^*\omega = f \cdot \omega'$ 得出 $d(f^*\omega) = d(f \cdot \omega')$ 和 $f^*d\omega = f \cdot d\omega'$. 由结构方程 (定理 5.2)

$$-\frac{1}{2}f^*([\omega, \omega]) + f^*\Omega = -\frac{1}{2}f([\omega', \omega']) + f \cdot \Omega',$$

得到

$$-\frac{1}{2}[f^*\omega, f^*\omega] + f^*\Omega = -\frac{1}{2}[f \cdot \omega', f \cdot \omega'] + f \cdot \Omega'.$$

这蕴涵着 $f^*\Omega = f \cdot \Omega'$.

(c) 令 τ 是 $x = \pi(u)$ 点处的一个圈. 置 $\tau' = f^{-1}(\tau)$ 因而 τ' 是 $x' = \pi'(u')$ 处的一个圈. 令 τ'^* 是从 u' 点出发的 τ' 的水平提升. 那么 $f(\tau'^*)$ 就是从 u 点出发的 τ 的水平提升. 于是结论 (c) 是明显的. 证毕.

在像命题 6.1 这样的情况下, 则称 f 把联络 Γ' 映射成联络 Γ. 特别当 $P'(M', G')$ 是 $P(M, G)$ 关于内射 f 的约化丛, 因而 $M' = M$ 且 $f : M' \to M$ 是恒等变换时,

则称 P 上的联络 Γ 可约化为 P' 上的联络 Γ'. 若从 $P(M,G)$ 的自同构 f 把 Γ 映射为 Γ, 则称 f 是联络 Γ 的自同构, 而且在此情况下称 Γ 是经 f 作用不变的.

命题 6.2 令 $f: P'(M',G') \to P(M,G)$ 是一个同态且使得相应同态 $f: G' \to G$ 把 G' 同构地映射到 G 上. 令 Γ 是 P 上的联络, ω 是 Γ 的联络形式而 Ω 是 Γ 的曲率形式. 那么

(a) P' 上有唯一的联络Γ'使得 Γ' 的水平子空间被 f 映射成 Γ 的水平子空间.

(b) 若 ω' 和 Ω' 分别是 Γ' 的联络形式和曲率形式, 那么 $f^*\omega = f \cdot \omega'$ 且 $f^*\Omega = f \cdot \Omega'$.

(c) 若 $u' \in P'$ 且 $u = f(u') \in P$, 那么同构 $f: G' \to G$ 把 $\Phi(u')$ 映射成 $\Phi(u)$ 并且把 $\Phi^0(u')$ 映射成 $\Phi^0(u)$.

证明 我们通过定义其联络形式 ω' 而定义联络 Γ'. 置 $\omega' = f^{-1} \cdot f^*\omega$, 其中 $f^{-1}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ 是从 $f: G' \to G$ 诱导的同构 $f: \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ 的逆. 令 $X' \in T_{u'}(P')$ 且 $a' \in G'$ 并且置 $X = fX'$ 和 $a = f(a')$. 则有

$$\begin{aligned}\omega'(R_{a'}X') &= f^{-1}(\omega(f(R_{a'}X'))) = f^{-1}(\omega(R_a X)) = f^{-1}(\mathrm{ad}(a^{-1})(\omega(X))) \\ &= \mathrm{ad}(a'^{-1})(f^{-1}(\omega(X))) = \mathrm{ad}(a'^{-1})(\omega(X')).\end{aligned}$$

令 $A' \in \mathfrak{g}'$ 且置 $A = f(A')$. 令 A^* 和 A'^* 分别表示对应于 A 和 A' 的基本向量场. 那么就有

$$\omega'(A'^*) = f^{-1}(\omega(A^*)) = f^{-1}(A) = A'.$$

这说明形式 ω' 定义一个联络 (命题 1.1). 其他结论的验证类似于命题 6.1 的证明, 因而将它留给读者. 证毕.

在命题 6.2 这样的情况下, 则 Γ' 是由 f 从 Γ 诱导的. 如果 f 是从映射, 即 $G' = G$ 并且 $f: G' \to G$ 是恒等自同构, 那么 $\omega' = f^*\omega$. 特别, 若给定了一个从 $P(M,G)$ 和一个映射 $f: M' \to M$, 则 P 上的每一个联络在诱导从 $f^{-1}P$ 上诱导一个联络.

对任何两个主纤维丛 $P(M,G)$ 和 $Q(M,H)$, $P \times Q$ 是 $M \times M$ 上以 $G \times H$ 为结构群的主纤维丛. 令 $P + Q$ 是 $P \times Q$ 在 $M \times M$ 的对角线 ΔM 上的限制. 因为 ΔM 和 M 自然是相互微分同胚的, 所以可将 $P + Q$ 看作 M 上以 $G \times H$ 为结构群的主纤维丛. 投影 $P \times Q \to P$ 在 $P + Q$ 上的限制 (记为 f_P) 是一个同态并伴有相应的自然同态 $f_G: G \times H \to G$. 类似地, 对于 $f_Q: P + Q \to Q$ 和 $f_H: G \times H \to H$, 结论也成立.

命题 6.3 令 Γ_P 和 Γ_Q 分别是 $P(M,G)$ 和 $Q(M,H)$ 上的联络. 那么

(a) 在 $P+Q$ 上有唯一的联络 Γ 使得同态 $f_P: P+Q \to P$ 和 $f_Q: P+Q \to Q$ 分别将 Γ 映射成 Γ_P 和 Γ_Q.

(b) 若 ω、ω_P 和 ω_Q 都是联络形式并且 Ω、Ω_P 和 Ω_Q 分别是 Γ、Γ_P 和 Γ_Q 的曲率形式, 那么

$$\omega = f_P^*\omega_P + f_Q^*\omega_Q, \quad \Omega = f_P^*\Omega_P + f_Q^*\Omega_Q.$$

(c) 令 $u \in P$, $v \in Q$, $(u,v) \in P+Q$, 那么 Γ 的和乐群 $\Phi(u,v)$(相应地, Γ 的限制和乐群 $\Phi^0(u,v)$) 是 $\Phi(u) \times \Phi(v)$(相应地, $\Phi^0(u) \times \Phi^0(v)$) 的子群. 同态 $f_G: G \times H \to G(f_H: G \times H \to H)$ 把 $\Phi(u,v)$ 映射到 $\Phi(u)(\Phi(v))$ 上, 而且把 $\Phi^0(u,v)$ 映射到 $\Phi^0(u)(\Phi^0(v))$ 上, 其中 $\Phi(u)$ 和 $\Phi^0(u)$(相应地, $\Phi(v)$ 和 $\Phi^0(v)$) 分别是 $\Gamma_P(\Gamma_Q)$ 的和乐群和限制和乐群.

本命题的证明类似于命题 6.1 和 6.2, 因而将它留给读者.

命题 6.4 令 $Q(M,H)$ 是 $P(M,G)$ 的一个子丛, 其中 H 是 G 的 Lie 子群. 假设 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 允许有一个子空间 $\mathfrak{m}$ 使得 $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$(直和) 且 $\mathrm{ad}(H)(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$, 其中 $\mathfrak{h}$ 是 H 的 Lie 代数. 对于 P 的每个联络形式 ω, ω 限制在 Q 上的 h 分量 ω' 是 Q 上的联络形式.

证明 令 $A \in \mathfrak{g}$ 且 A^* 是对应于 A 的基本向量场, 那么 $\omega'(A^*)$ 是 $\omega(A^*) = A$ 的 $\mathfrak{h}$ 分量. 因此 $\omega'(A^*) = A$. 令 φ 是 ω 限制在 Q 上的 $\mathfrak{m}$ 分量. 令 $X \in T_v(Q)$ 且 $a \in H$, 那么

$$\omega(R_aX) = \omega'(R_aX) + \varphi(R_aX).$$

$$\mathrm{ad}(a^{-1})(\omega(X)) = \mathrm{ad}(a^{-1})(\omega'(X)) + \mathrm{ad}(a^{-1})(\varphi(X)).$$

上面两个等式的左边一致. 比较右边的 $\mathfrak{h}$ 分量得到 $\omega'(R_aX) = \mathrm{ad}(a^{-1})(\omega'(X))$. 注意到我们利用了 $\mathrm{ad}(a^{-1})(\varphi(X))$ 在 $\mathfrak{m}$ 中这一事实. 证毕.

评注 由 ω 定义的 P 上的联络可约化成子丛 Q 上的联络当且仅当 ω 在 Q 上的限制是 $\mathfrak{h}$ 值的. 在命题 6.4 的假设条件下, 这意味着在 Q 上 $\omega' = \omega$.

2.7 约化定理

除非另有说明, 我们将总是用 "曲线" 一词来指分段 C^∞ 可微曲线, 并且将和乐群 $\Phi_\infty(u_0)$ 记为 $\Phi(u_0)$.

首先建立一个定理.

定理 7.1 (约化定理) 令 $P(M,G)$ 是一个带有联络 Γ 的主纤维丛, 其中 M 是连通的和仿紧的. 令 u_0 是 P 的任一点, 用 $P(u_0)$ 表示 P 中能用水平曲线连接到 u_0 的点的集合. 那么

(1) $P(u_0)$ 是一个带结构群 $\Phi(u_0)$ 的约化丛.

(2) 联络 Γ 可约化为 $P(u_0)$ 上的联络.

证明　(1) 首先证明下列引理.　证毕.

引理 1　令 Q 是 $P(M,G)$ 的一个子集且 H 是 G 的一个子群. 假设: (1) 射影 $\pi: P \to M$ 将 Q 映射到 M 上; (2) Q 在 H 作用下是稳定的, 即对于每个 $a \in H$, $R_a(Q) = Q$; (3) 如果 $u, v \in Q$ 且 $\pi(u) = \pi(v)$, 则有一个元素 $a \in H$ 使得 $v = ua$; (4) M 的每一点 x 都有一个邻域 U 和一个截面 $\sigma: U \to P$ 使得 $\sigma(U) \subset Q$. 那么 $Q(M,H)$ 是 $P(M,G)$ 的约化子丛.

引理 1 的证明　对每个 $u \in \pi^{-1}(U)$, 令 $x = \pi(u)$ 并且 $a \in G$ 是由 $u = \sigma(x)a$ 决定的元素. 通过置 $\psi(u) = (x, a)$ 定义一个同构 ψ: $\pi^{-1}(U) \to U \times G$. 容易看出 ψ 将 $Q \cap \pi^{-1}(U)$ 一一地映射到 $U \times H$ 上. 用下列方式在 Q 上引进一个可微结构以使 $\psi: Q \cap \pi^{-1}(U) \to U \times H$ 成为一个微分同胚, 像在第一章命题 5.3 的证明中那样应用第一章命题 1.3, 则可以看出 Q 成为一个可微流形. 那么显然 Q 成为 M 上带结构群 H 的主纤维丛, 而且 Q 是 P 的一个子丛.

现在回到定理 7.1 第一个论断的证明, 既然 M 是仿紧的, 那么和乐群 $\Phi(u_0)$ 是 G 的一个 Lie 子群 (定理 4.2) 并且子集 $P(u_0)$ 和群 $\Phi(u_0)$ 满足引理 1 的条件 (1)、(2)、(3) (参看命题 4.1 之前所给出的 $\Phi(u_0)$ 的第二种定义并参看命题 4.1(b)). 为验证引理 1 的条件 (4), 令 $x^1, \cdots, x^n$ 是 x 点附近的局部坐标系并使得 x 是这个坐标系的原点 $(0, \cdots, 0)$. 令 U 是由 $|x^i| < \delta$ 定义的 x 的方形邻域. 给定任何点 $y \in U$, 令 τ_y 是在这个坐标系中从 x 到 y 的线段. 固定一点 $u \in Q$ 使得 $\pi(u) = x$. 令 $\sigma(y)$ 是通过 u 沿 τ_y 的平移而得到的 P 的一点. 那么 $\sigma: U \to P$ 是一个使得 $\sigma(U) \subset Q$ 的截面. 于是定理 7.1 的结论 (1) 可从引理 1 得出.　证毕.

(2) 是下列引理的直接推论.

引理 2　令 $Q(M,H)$ 是 $P(M,G)$ 的一个子丛且 Γ 是 P 上的联络. 若对于每个 $u \in Q$, $T_u(P)$ 的水平子空间切于 Q, 那么 Γ 可约化成 Q 上的联络.

引理 2 的证明　在 Q 上定义一个联络 Γ' 如下. 由定义, $T_u(Q)(u \in Q)$ 关于 Γ' 的水平子空间是 $T_u(P)$ 关于 Γ 的水平子空间. 显然 Γ 可约化成 Γ'.　证毕.

$P(u)$ 称为过 u 点的和乐丛. 显然当且仅当 u 和 v 能由水平曲线连接时 $P(u) = P(v)$. 因为 2.4 节中引进的关系 $\sim$(当 u 和 v 能用水平曲线连接时, $u \sim v$) 是等价关系, 所以对于 P 的每一对点 u 和 v 而言, 要么 $P(u) = P(v)$, 要么 $P(u) \cap P(v)$ 为空集. 换句话说, P 可分解成和乐丛的不交并. 因为每个 $a \in G$ 将水平曲线映射成水平曲线, 所以 $R_a(P(u)) = P(ua)$ 并且 $R_a: P(u) \to P(ua)$ 是与结构群的同构 $\mathrm{ad}(a^{-1}): \Phi(u) \to \Phi(ua)$ 相对应的同构. 容易看出, 对任何给定的 u 和 v 都有一个元素 $a \in G$ 使得 $P(v) = P(ua)$. 因而和乐丛 $P(u)(u \in P)$ 都是互相同构的.

利用定理 7.1 可以证明各和乐群 $\Phi_k(u)(1 \leqslant k \leqslant \infty)$ 都是相同的, 正如 2.4 节

的评注所指出的那样. 这一结果归功于 Nomizu 和 Ozeki [2].

定理 7.2 所有和乐群 $\Phi_k(u)(1 \leqslant k \leqslant \infty)$ 都是相同的.

证明 只需证明 $\Phi_1(u) = \Phi_\infty(u)$ 就行了. 将 $\Phi_\infty(u)$ 记为 $\Phi(u)$ 并将过 u 点的和乐丛记为 $P(u)$. 由定理 7.1 知道 $P(u)$ 是 P 的一个以 $\Phi(u)$ 作为结构群的子丛. 通过对 $u \in P$ 置

$$S_u = T_u(P(u))$$

而在 P 上定义一个分布 S. 因为和乐丛具有相同的维数, 比如说是 k, 因而 S 成为一个 k 维分布. 首先证明两个引理. 证毕.

引理 1 (1) S 是可微的和对合的.

(2) 对每个 $u \in P$, $P(u)$ 是 S 的过 u 点的极大积分流形.

引理 1 的证明 (1) 置

$$S_u = S'_u + S''_u, \quad u \in P,$$

其中 S'_u 是水平的而 S''_u 是垂直的. 正是由联络的定义, 分布 S' 是可微的, 为证明 S 的可微性, 只需再证 S'' 的可微性即可. 对每个 $u \in P$, 令 U 是 $x = \pi(u)$ 的一个邻域而且截面 $\sigma : U \to P(u)$ 使得 $\sigma(x) = u$. (在定理 7.1 的证明中曾构造出这样一个截面). 令 $A_1, \cdots, A_r$ 是 $\Phi(u)$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}(u)$ 的基. 在 $\pi^{-1}(U)$ 上定义向量场 $\tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_r$ 使它们在 $\pi^{-1}(U)$ 的每一点处都构成 S'' 的基. 令 $v \in \pi^{-1}(U)$, 则有唯一的 $a \in G$ 使得 $v = \sigma(\pi(v))a$. 因为 $\mathrm{ad}(a^{-1}) : \Phi(u) \to \Phi(v)$ 是一个同构, 所以 $\mathrm{ad}(a^{-1})(A_i)(i = 1, \cdots, r)$ 都是 $\mathfrak{g}(v)$ 的元素, 并且构成 $\mathfrak{g}(v)$ 的一个基. 置

$$(\tilde{A}_i)_v = (\mathrm{ad}(a^{-1})(A_i))^*_v, \quad i = 1, \cdots, r,$$

其中 $(\mathrm{ad}(a^{-1})(A_i))^*$ 是 P 上对应于 $\mathrm{ad}(a^{-1})(A_i) \in \mathfrak{g}(v) \subset \mathfrak{g}$ 的基本向量场 $(i = 1, \cdots, r)$. 容易看出在 $\pi^{-1}(U)$ 上 $\tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_r$ 是可微的并且构成 S'' 的基.

对于每一点 u, $P(u)$ 都是 S 的一个积分流形, 因为对于每个 $v \in P(u)$, 都有 $T_v(P(u)) = T_v(P(v)) = S_v$. 这就蕴涵着 S 是对合的.

(2) 令 $W(u)$ 是 S 过 u 点的极大积分流形 (参看第一章命题 1.2), 那么 $P(u)$ 是 $W(u)$ 的一个开子流形. 我们要证明 $P(u) = W(u)$. 令 v 是 $W(u)$ 的任意一点, 并且令 $u(t)(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是 $W(u)$ 中的一条曲线使得 $u(0) = u$, $u(1) = v$. 令 t_1 是使得 $0 \leqslant t \leqslant t_0$ 蕴涵着 $u(t) \in P(u)$ 的 t_0 的上确界. 因为 $P(u)$ 在 $W(u)$ 中是开的, 所以 t_1 是正的. 现在证明 $u(t_1)$ 在 $P(u)$ 中; 因为 $P(u)$ 在 $W(u)$ 中是开的, 这蕴涵着 $t_1 = 1$, 从而证明 $u(1) = v$ 在 $P(u)$ 中. 点 $u(t_1)$ 在 $P(u(t_1))$ 中而且 $P(u(t_1))$ 在 $W(u(t_1))$ 中是开的. 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $t_1 - \varepsilon < t < t_1 + \varepsilon$ 蕴涵 $u(t) \in P(u(t_1))$. 令 t 是满足 $t_1 - \varepsilon < t < t_1$ 的任何值. 由 t_1 的定义得知 $u(t) \in P(u)$. 另一方面,

$u(t) \in P(u(t_1))$. 这就蕴涵着 $P(u) = P(u(t_1))$ 因而 $u(t_1) \in P(u)$, 这正是我们所要证明的. 从而证明了 $P(u)$ 确实是 S 过 u 点的极大积分流形. 证毕.

引理 2 令 S 是C^∞流形上的对合 C^∞ 分布. 设 $x_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是一条分段 C^1 曲线, 其切向量 $\dot{x}_t$ 属于 S. 那么整个曲线 x_t 在 S 过 x_0 点的极大积分流形 W 中.

引理 2 的证明 我们可以假设 x_t 是一条 C^1 曲线. 取 x_0 点处的一个局部坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 使得 $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^k}(k = \dim S)$ 构成 S 的一个局部基(参看 Chevalley[1; p.92]). 对于小的 t 值(比方说 $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$), x_t 可以由 $x^i = x^i(t)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 表示而且它的切向量由 $\sum\limits_i \dfrac{dx^i}{dt}\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 给出. 由假设, 对 $k+1 \leqslant i \leqslant n$, $\dfrac{dx^i}{dt} = 0$. 因而对于 $k+1 \leqslant i \leqslant n$, $x^i(t) = x^i(0)$, 所以 $x_t(0 \leqslant t \leqslant \varepsilon)$ 在过 x_0 的片中从而在 W 中. 可用标准继续论证方法来完成引理 2 的证明.

现在我们已经有条件来完成定理 7.2 的证明. 令 a 是 $\Phi_1(u)$ 的任何元素. 这意味着 u 和 ua 能够用 P 中的一条分段 C^1 的水平曲线 $u_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 连接起来. 每一点处的切向量 $\dot{u}_t$ 显然 S_{u_t} 中. 由引理 2, 整个曲线 u_t 在 S 的过 u 点的极大积分流形 $W(u)$ 中. 由引理 1, 整个曲线 u_t 在 $P(u)$ 中. 特别, ua 是 $P(u)$ 的一点. 因为 $P(u)$ 是一个带结构群 $\Phi(u)$ 的子丛, 所以 a 属于 $\Phi(u)$. 证毕.

推论 7.3 各限制和乐群 $\Phi_k^0(1 \leqslant k \leqslant \infty)$ 都是相同的.

证明 对于每一个 k, $\Phi_k^0(u)$ 是 $\Phi_k(u)$ 的单位连通分支 (参看定理 4.2 及其证明). 于是推论 7.3 可从定理 7.2 得出. 证毕.

评注 在 $P(M,G)$ 是一个带解析联络的实解析主丛的情况下, 仍然可以只用分段解析的水平曲线来定义和乐群 $\Phi_\omega(u)$. 在证明定理 7.2 和推论 7.3 中使用的论证方法说明 $\Phi_\omega(u) = \Phi_1(u)$ 且 $\Phi_\omega^0(u) = \Phi_1^0(u)$.

在主纤维丛 $P(M,G)$ 上给定一个联络 Γ, 我们要在以 F 为标准纤维的伴随丛 $E(M,F,G,P)$ 上定义平移的概念. 对每个 $w \in E$, $T_w(E)$ 的水平子空间 Q_w 和垂直子空间 F_w 可定义如下. 由定义, 垂直子空间 F_w 是 E 在 w 点的纤维的切空间. 为了定义 Q_w, 回想到有自然射影 $P \times F \to E = P \times_G F$. 选取被映射成 w 的一点 $(u,\xi) \in P \times F$. 固定这个 $\xi \in F$ 并且考虑将 $v \in P$ 映射成 $v\xi \in E$ 的映射 $P \to E$. 那么由定义, 水平子空间 Q_w 是水平子空间 $Q_u \subset T_u(P)$ 在这个映射 $P \to E$ 下的象. 容易看出, Q_w 不依赖于 $(u,\xi) \in P \times F$ 的选取. 我们把对 $T_w(E) = F_w + Q_w$(直和) 的证明留给读者. 若 E 中的一条曲线其每一点的切向量都是水平的, 则称此曲线是水平的. 给定 M 上的一条曲线 τ, 则 τ 的 (水平) 提升 τ^* 是 E 中的一条水平曲线且使得 $\pi_E(\tau^*) = \tau$. 给定一条曲线 $\tau = x_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 和一个点 w_0 使得 $\pi_E(w_0) = x_0$, 则有唯一的一个从 w_0 出发的水平提升 $\tau^* = w_t$. 为证明 τ^* 的存在性, 在 P×F 中选取一点 (u_0,ξ) 使得 $u_0\xi = w_0$. 令 u_t 是 $\tau = x_t$ 的从 u_0 出发的提

升, 那么 $w_t = u_t\xi$ 是 τ 的从 w_0 出发的提升. τ^* 的唯一性跟主纤维丛中提升的情况一样归结为满足给定初始条件的线性常微分方程组的解的唯一性. 在 M 的开集 U 上定义的 E 的截面 σ, 若对每个 $x \in U$, $T_x(M)$ 在σ下的象都是水平的, 即对于任何曲线 $\tau = x_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$, $\sigma(x_0)$ 沿 τ 的平移均给出$\sigma(x_1)$, 则该截面 σ 称为平行的.

命题 7.4 令 $P(M,G)$ 是一个主纤维丛并且 $E(M,G/H,G,P)$ 是从 G/H 为标准纤维的伴随丛, 其中 H 是 G 的一个闭子群. 令 $\sigma : M \to E$ 是一个截面, 而 $Q(M,H)$ 是 $P(M,G)$ 的对应于 σ 的约化子丛 (参看第一章命题 5.6). 那么 P 上的联络 $\varGamma$ 可约化为 Q 上的联络 $\varGamma'$ 当且仅当 σ 关于 $\varGamma$ 是平行的.

证明 若将 E 等同于 P/H(参看第一章命题 5.5), 则 $\sigma(M)$ 与 Q 在自然射影 $\mu : P \to E = P/H$ 下的象一致, 换句话说, 若 $u \in Q$ 且 $x = \pi(u)$, 则有 $\sigma(x) = \mu(u)$(参看第一章命题 5.6). 设 $\varGamma$ 可约化成 Q 中的联络 $\varGamma'$. 注意到. 若 ξ 是 G/H 的原点 (即陪集 H), 那么对每个 $u \in P$, $u\xi = \mu(u)$, 因此, 若 $u_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 在 P 中是水平的, 那么 $\mu(u_t)$ 在 E 中也是水平的. 在 M 中给定一条曲线 $x_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$, 选取 $u_0 \in Q$ 满足 $\pi(u_0) = x_0$, 那么 $\sigma(x_0) = \mu(u_0)$. 令 u_t 是 x_t 在 P 中从 u_0 出发的 (关于 $\varGamma$ 的) 提升, 那么 $\mu(u_t)$ 是 x_t 在 E 中从 $\sigma(x_0)$ 出发的提升. 因为 $\varGamma$ 可约化为 $\varGamma'$, 故对所有 t, $u_t \in Q$ 因而 $\mu(u_t) = \sigma(x_t)$. 反过来, 假设 σ(关于 $\varGamma$) 是平行的. 给定 M 中的任何曲线 $x_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 和 Q 中任何满足 $\pi(u_0) = x_0$ 的点 u_0, 令 u_t 是 x_t 在 P 中从 u_0 出发的提升. 因为 σ 是平行的, 所以对所有 t, $\mu(u_t) = \sigma(x_t)$, 因此 $u_t \in Q$. 这说明在 $u_0 \in Q$ 点处 (关于 $\varGamma$ 的) 每一个水平向量都切于 Q. 由命题 7.2, $\varGamma$ 可约化为 Q 上的联络. 证毕.

2.8 和乐定理

我们首先应用定理 7.1 来证明 Ambrose 和 Singer[1] 的下列结果.

定理 8.1 令 $P(M,G)$ 是一个主纤维丛, 其中 M 是连通的和仿紧的. 令 $\varGamma$ 是 P 上的一个联络, Ω 是曲率形式, $\varPhi(u)$ 是关于基点 $u \in P$ 的和乐群且 $P(u)$ 是 $\varGamma$ 的过 u 点的和乐丛. 那么 $\varPhi(u)$ 的 Lie 代数是 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个子空间而且它是由所有形如 $\Omega_v(X,Y)$ 的元素张成的, 其中 $v \in P(u)$ 且 X 和 Y 是 v 点处的任意水平向量.

证明 根据定理 7.1, 可以假设 $P(u) = P$, 即 $\varPhi(u) = G$. 令 $\mathfrak{g}'$ 是所有形如 $\Omega_v(X,Y)$ 的元素所张成的 $\mathfrak{g}$ 的子空间, 其中 $v \in P(u) = P$ 而 X 和 Y 是 v 点处的任意水平向量. 子空间 $\mathfrak{g}'$ 实际是 $\mathfrak{g}$ 的一个理想, 因为 Ω 是 ad$G$ 型张量形式 (参看 2.5 节), 因此 $\mathfrak{g}$ 是在 ad$G$ 作用下不变的. 我们将证明 $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.

在每一点 $v \in P$ 处, 令 S_v 是由水平子空间 Q_v 和子空间 $\mathfrak{g}'_v = \{A^*_v; A \in \mathfrak{g}'\}$ 张成的 $T_v(P)$ 的子空间, 其中 A^* 是 P 上相应于 A 的基本向量场. 分布 S 的维数

是 $n+r$, 其中 $n=\dim M$, $r=\dim\mathfrak{g}'$. 我们要证明 S 是可微的和对合的, 令 v 是 P 的任意一点而且 U 是 $y=\pi(v)$ 的一个坐标邻域使得 $\pi^{-1}(U)$ 同构于 $U\times G$. 令 $X_1,\cdots,X_n$ 是 U 上处处线性无关的可微向量场而且 $X_1^*,\cdots,X_n^*$ 是 $X_1,\cdots,X_n$ 的水平提升. 令 $A_1,\cdots,A_r$ 是 $\mathfrak{g}'$ 的一个基且 $A_1^*,\cdots,A_r^*$ 是对应的基本向量场. 显然 $X_1^*,\cdots,X_n^*,A_1^*,\cdots,A_r^*$ 构成 S 的一个局部基. 为证明 S 是对合的, 只需验证这些向量场中任何两个的括号积属于 S. 对 $[A_i^*,A_j^*]$ 来说这是显然的, 因为 $[A_i,A_j]\in\mathfrak{g}'$ 而且 $[A_i,A_j]^*=[A_i^*,A_j^*]$. 由定理 5.2 的引理, $[A_i^*,X_j^*]$ 是水平的; 实际上 $[A_i^*,X_j^*]=0$, 因为对于每个 $a\in G$, X_j^* 在 R_a 作用下是不变的. 最后置 $A=\omega([X_i^*,X_j^*])\in\mathfrak{g}$, 其中 ω 是 Γ 的联络形式. 由推论 5.3, $A=\omega([X_i^*,X_j^*])=-2\Omega(X_i^*,X_j^*)\in\mathfrak{g}'$. 因为 $[X_i^*,X_j^*]$ 在 $v\in P$ 点的垂直分量等于 $A_v^*\in S_v$, 所以 $[X_i^*,X_j^*]$ 属于 S. 这就证明了 S 是对合的. 令 P_0 是 S 过 u 点的极大积分流形. 由定理 7.2 证明中的引理 2, 得 $P_0=P$. 因此

$$\dim\mathfrak{g}=\dim P-n=\dim P_0-n=\dim\mathfrak{g}'.$$

这就蕴涵着 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'$.　证毕.

然后我们来证明下列定理.

定理 8.2　令 $P(M,G)$ 是一个主纤维丛, 其中 P 是连通的, 而 M 是仿紧的. 若 $\dim M\geqslant 2$, 则在 P 上存在一个联络使得所有和乐丛 $P(u)(u\in P)$ 与 P 一致.

证明　令 u_0 是 P 的任意一点而且 $x^1,\cdots,x^n$ 是以 $x_0=\pi(u_0)$ 为原点的局部坐标系. 令 U 和 V 分别是由 $|x^i|<\alpha$ 和 $|x^i|<\beta$ 定义的 x_0 的两个邻域, 其中 $0<\beta<\alpha$. 取 α 充分小, 则可以假定 $P|U=\pi^{-1}(U)$ 同构于平凡丛 $U\times G$. 在 $P|U$ 上构造一个联络 Γ' 使得从 $P|V$ 的和乐群与 G 的单位分支一致. 然后再将 Γ' 扩张成 P 上的联络 Γ 并且使得 Γ 在 $P|\bar{V}$ 上与 Γ' 一致 (参看定理 2.1).

令 $A_1,\cdots,A_r$ 是 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个基. 选取实数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 使得 $0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_r<\beta$ 并且令 $f_i(t)(i=1,\cdots,r)$ 是 $-\alpha-\varepsilon<t<\alpha+\varepsilon$ 内的可微函数使得对每个 i, $f_i(0)=0$ 且 $f_i(\alpha_j)=\delta_{ij}$(Kronecker 符号). 在 $\pi^{-1}(U)=U\times G$ 上, 可以通过要求

$$\omega_{(x,e)}(\partial/\partial x^1)=\sum_{j=1}^r f_i(x^2)A_j$$

和

$$\omega_{(x,e)}(\partial/\partial x^i)=0,\quad i=2,3,\cdots,n$$

来定义一个联络形式 ω. (注意到, 根据性质 $R_a^*\omega=\mathrm{ad}(a^{-1})(\omega)$), 则上面的条件决定 ω 在 $U\times G$ 的每一点 (x,a) 上的值.

暂且固定 $t(0<t<\beta)$ 和 $\alpha_k(1\leqslant k\leqslant r)$. 在 V 中的 x^1x^2 平面上考虑由下列四条线段构成的矩形: 从 $(0,0)$ 到 $(0,\alpha_k)$ 的线段 τ_1, 从 $(0,\alpha_k)$ 到 (t,α_k) 的

τ_2, 从 (t,α_k) 到 $(t,0)$ 的 τ_3 和从 $(t,0)$ 到 $(0,0)$ 的 τ_4. (在这里和以下的论证中, 所有点的 x^3 至 x^n 坐标保持为 0, 因而被省略掉.) 在 $\pi^{-1}(V) = V \times G$ 中, 决定 $\tau = \tau_4 \cdot \tau_3 \cdot \tau_2 \cdot \tau_1$ 的从 $(0,0;e)$ 出发的水平提升. τ_1 的从 $(0,0;e)$ 出发的提升 τ_1^* 显然是 $(0,s;e)(0 \leqslant s \leqslant \alpha_k)$, 因为它的切向量 $\partial/\partial x^2$ 是水平的. τ_2 的从 τ_1^* 的终点 $(0,\alpha_k;e)$ 出发的提升 τ_2^* 具有 $(s,\alpha_k;c_s)(0 \leqslant s \leqslant t)$ 的形式, 其中 c_s 是 G 中满足 $c_0 = e$ 的一条适当曲线. 它的切向量具有 $(\partial/\partial x^1)_{(s,\alpha_k)} + \dot{c}_s$ 的形式. 由类似于命题 3.1 的计算得到

$$\begin{aligned}\omega((\partial/\partial x^1)_{(s,\alpha_k)} + \dot{c}_s) &= \mathrm{ad}(c_s^{-1})\omega((\partial/\partial x^1))_{(s,\alpha_k;e)} + c_s^{-1} \cdot \dot{c}_s \\ &= \mathrm{ad}(c_s^{-1})\left(\sum_{j=1}^{r} f_j(\alpha_k)A_j\right) + c_s^{-1} \cdot \dot{c}_s = \mathrm{ad}(c_s^{-1})A_k + c_s^{-1} \cdot \dot{c}_s.\end{aligned}$$

因此有 $c_s \cdot c_s^{-1} = -A_k$, 即 $c_s = \exp(-sA_k)$. 因此 τ_2^* 的终点是 $(t,\alpha_k;\exp(-tA_k))$. τ_3 的从 $(t,\alpha_k;\exp(-tA_k))$ 出发的提升 τ_3^* 是 $(t,\alpha_k - s;\exp(-tA_k))(0 \leqslant s \leqslant \alpha_k)$. 最后从 τ_3^* 的终点 $(t,0;\exp(-tA_k))$ 出发的 τ_4 的提升 τ_4^* 是 $(t-s,0;\exp(-tA_k))(0 \leqslant s \leqslant t)$. 因为 $\partial/\partial x^1$ 在满足 $x^2 = 0$ 的各点处是水平的. 这说明 τ 的提升 τ^* 的终点是 $(0,0;\exp(-tA_k))$ 从而证明了 $\exp(-tA_k)$ 是 $\pi^{-1}(V)$ 以 $(0,0;e)$ 为基点的和乐群中的一个元素. 因为对于每个 t 都是这种情况, 从而可以看出 A_k 在该和乐群的 Lie 代数之中. 因为这个结果对任何 A_k 都有效, 所以 $\pi^{-1}(V)$ 的联络的和乐群与 G 的单位分支一致.

令 Γ 是 P 上的联络并且在 $\pi^{-1}(V)$ 上与联络 Γ' 一致. 因为 Γ 的和乐群 $\Phi(u_0)$ 显然包含 G 的单位分支, 所以 Γ 的和乐从 $P(u_0)$ 跟 P 具有同样的维数因而在 P 中是开的. 由于 P 是一些和乐丛的不交并而且每一个都是开的, 所以 P 的连通性就蕴涵着 $P = P(u_0)$. 证毕.

推论 8.3 任何一个连通 Lie 群 G 都可以看作是平凡丛 $P = M \times G$ 上某个联络的和乐群, 其中 M 是任意一个 $\dim M \geqslant 2$ 的可微流形.

Hano 和 Ozeki[1] 对线性联络的情况证明了定理 8.2, 然后 Nomizu 对一般情况证明了该定理, 两者都使用了定理 8.1. 上面这个更直接的证明归功于 E.Ruh (未发表).

2.9 平坦联络

令 $P = M \times G$ 是平凡主纤维丛. 对每个 $a \in G$, 集合 $M \times \{a\}$ 都是 P 的子流形. 特别 $M \times \{e\}$ 是 P 的一个子流形, 其中 e 是 G 的单位元. P 的标准平坦联络是通过将 $M \times \{a\}$ 在 $u = (x,a) \in M \times G$ 点的切空间取作 u 点处的水平子空间而定义的. 换句话说, P 上的一个联络是标准平坦联络当且仅当它可约化为 $M \times \{e\}$

上的唯一联络. 令 θ 是 G 上的标准 1 形式 (参看第一章 1.4 节). 令 $f: M\times G\to G$ 是自然射影并且置

$$\omega = f^*\theta.$$

容易验证 ω 是 P 的标准平坦联络的联络形式. θ 的 Maurer-Cartan 方程蕴涵着标准平坦联络的曲率为零:

$$\begin{aligned} d\omega = d(f^*\theta) = f^*(d\theta) &= f^*(-\frac{1}{2}[\theta,\theta]) \\ = -\frac{1}{2}[f^*\theta, f^*\theta] &= -\frac{1}{2}[\omega,\omega]. \end{aligned}$$

任何主纤维丛 $P(M,G)$ 上的联络, 若 M 的每一点 x 都有一个邻域 U 使得 $P|U = \pi^{-1}(U)$ 上的诱导联络一同构于 $U\times G$ 上的标准平坦联络, 则称该联络是平坦的. 更确切地说是存在这样一个同构 $\psi: \pi^{-1}(U)\to U\times G$, 它将每一点 $u\in\pi^{-1}(U)$ 处的水平子空间映射到 $U\times G$ 的标准平坦联络在 $\psi(u)$ 点的水平子空间上.

定理 9.1 $P(M,G)$ 上的联络是平坦的, 当且仅当曲率形式恒为零.

证明 必要性是显然的. 假设曲率形式恒为零. 对 M 的每一点 x, 令 U 是 x 的一个单连通开邻域并考虑 $P|U=\pi^{-1}(U)$ 上的诱导联络. 由定理 4.2 和 8.1, $P|U$ 的诱导联络的和乐群仅由单位元组成. 应用约化定理 (定理 7.1) 可以看出 $P|U$ 上的诱导联络同构于 $U\times G$ 的标准平坦联络. 证毕.

推论 9.2 令 Γ 是 $P(M,G)$ 上的一个使得曲率恒为零的联络. 若 M 是仿紧的和单连通的, 那么 P 同构于平凡丛 $M\times G$ 并且 Γ 同构于 $M\times G$ 的标准平坦联络.

下面我们研究 M 不必是单连通的情况. 令 Γ 是 $P(M,G)$ 上的平坦联络, 其中 M 是连通的和仿紧的. 令 $u_0\in P$ 且 $M^*=P(u_0)$ 是过 u_0 的和乐丛, 则 M^* 是 M 上以和乐群 $\Phi(u_0)$ 为结构群的主纤维丛. 因为由定理 4.2 和 8.1, $\Phi(u_0)$ 是离散的, 又因为 M^* 是连通的, 所以 M^* 是 M 的覆盖空间. 置 $x_0=\pi(u_0)$, $x_0\in M$. M 的每一条从 x_0 出发的闭曲线, 通过沿它的平移可以定义 $\Phi(u_0)$ 的一个元素. 因为由定理 4.2 和 8.1, 限制和乐群是平凡的, 所以在 x_0 点处表示第一同伦群 $\pi_1(M,x_0)$ 的同一元素的任何两条闭曲线产生 $\Phi(u_0)$ 的同一个元素. 因而得到从 $\pi_1(M,x_0)$ 到 $\Phi(u_0)$ 的一个同态. 令 N 是 $\Phi(u_0)$ 的一个正规子群, 并且置 $M'=M^*/N$, 那么 M' 是 M 上以 $\Phi(u_0)/N$ 为结构群的主纤维丛. 特别地, M' 是 M 的覆盖空间. 令 $P'(M',G)$ 是由覆盖射影 $M'\to M$ 从 $P(M,G)$ 诱导的主纤维丛. 令 $f: P'\to P$ 是自然同态 (参看第一章命题 5.8).

命题 9.3 在 $P'(M',G)$ 上存在唯一的联络 Γ' 经同态 $f: P'\to P$ 映射成 Γ. 联络 Γ' 是平坦的. 若 u_0' 是 P' 的一点使得 $f(u_0')=u_0$, 那么以 u_0' 为基点的 Γ' 的

和乐群 $\Phi(u_0')$ 被 f 同构地映射到 N 上.

证明 第一个结论包含在命题 6.2 中. 同样由命题 6.2 得知 Γ' 的曲率形式恒为零, 并且 Γ' 是平坦的. 回想到 P' 是 $M' \times P$ 的如下定义的子集 (参看第一章命题 5.8):

$$P' = \{(x', u) \in M' \times P; \mu(x') = \pi(u)\},$$

其中 $\mu : M' \to M$ 是覆盖射影. 射影 $\pi' : P' \to M'$ 由 $\pi'(x', u) = x'$ 给出并且同态 $f : P' \to P$ 由 $f(x', u) = u$ 给出因而结构群的相应同态 $f : G \to G$ 是恒等自同构. 因此为证明 f 把 $\Phi(u_0')$ 同构地映射到 N 上, 只需证明 $\Phi(u_0') = N$. 记

$$u_0' = (x_0', u_0) \in P' \subset M' \times P.$$

由于 $\mu(x_0') = \pi(u_0)$, 所以存在一个元素 $a \in \Phi(u_0)$ 使得

$$x_0' = \nu(u_0 a),$$

其中 $\nu : M^* = P(u_0) \to M' = P(u_0)/N$ 是覆盖射影. 令 $\tau = u_t'(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是 P' 中的一条水平曲线使得 $\pi'(u_0') = \pi(u_1')$. 对于每一个 t, 置

$$u_t' = (x_t', u_t) \in P' \subset M' \times P,$$

那么曲线 $u_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 在 P 中是水平的, 因而包含在 $M^* = P(u_0)$ 中. 因为 $\mu(x_t') = \pi(u_t) = \mu \circ \nu(u_t)$ 且 $x_0' = \nu(u_0 a)$, 所以对 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 有 $x_t' = \nu(u_t a)$. 于是有

$$\nu(u_1 a) = x_1' = \pi'(u_1') = \pi'(u_0') = x_0' = \nu(u_0 a),$$

所以

$$\nu(u_1) = \nu(u_0).$$

这意味着 $u_1 = u_0 b$ 对于某个 $b \in N$ 成立. 这说明 $\Phi(u_0') \subset N$. 反过来. 令 b 是 N 的任何元素, 令 $u_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是 P 中的一条水平曲线使得 $u_1 = u_0 b$, 在 P' 中由

$$u_t' = (x_t', u_t)$$

定义一条水平曲线 $u_t'(0 \leqslant t \leqslant 1)$, 其中 $x_t' = \nu(u_t a)$. 那么 $u_1' = u_0' b$, 这说明 $b \in \Phi(u_0')$. 证毕.

2.10 局部和乐群与无穷小和乐群

令 Γ 是主纤维丛 $P(M, G)$ 上的联络, 其中 M 是连通的和仿紧的. 对于 M 的每个连通开集 U, 令 Γ_U 是从 Γ 诱导的 $P|_U = \pi^{-1}(U)$ 上的联络. 对于每个

$u \in \pi^{-1}(U)$, 分别用 $\Phi^0(u,U)$ 和 $P(u,U)$ 表示联络 Γ_U 的以 u 为基点的限制和乐群和经过 u 点的和乐丛. $P(u,U)$ 是由 $\pi^{-1}(U)$ 的那些能用 $\pi^{-1}(U)$ 中的水平曲线连接到 u 的点 v 组成的.

我们将 Γ 的以 u 为基点的局部和乐群 $\Phi^*(u)$ 定义为交集 $\cap\Phi^0(u,U)$, 其中 U 取遍 $x=\pi(u)$ 点的所有连通开邻域. 若 $\{U_k\}$ 是 x 的连通开邻域序列使得 $U_k \supset \bar{U}_{k+1}$ 并且 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} U_k = x$, 那么显然有 $\Phi^0(u,U_1) \supset \Phi^0(u,U_2) \supset \cdots \supset \Phi^0(u,U_k) \supset \cdots$. 因为对 x 的每个开邻域 U, 存在一个整数 k 使得 $U_k \subset U$, 所以有 $\Phi^*(u) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Phi^0(u,U_k)$. 因为每个群 $\Phi^0(u,U_k)$ 都是 G 的一个连通 Lie 子群 (定理 4.2), 由此可知对于充分大的 k, $\dim \Phi^0(u,U_k)$ 为常数, 因而对于这种 k, $\Phi^*(u) = \Phi^0(u,U_k)$. 于是下列命题是明显的.

命题 10.1 局部和乐群具有下列性质:

(1) $\Phi^*(u)$ 是 G 的一个包含在限制和乐群 $\Phi^0(u)$ 中的连通 Lie 子群;

(2) 每一点 $x=\pi(u)$ 都有一个开邻域 U 使得 $\Phi^*(u) = \Phi^0(u,V)$ 对 x 的任何包含在 U 中的连通开邻域 V 成立;

(3) 若 U 是 $x=\pi(u)$ 的这种邻域, 那么 $\Phi^*(u) \supseteq \Phi^*(v)$ 对于每一个 $v \in P(u,U)$ 成立;

(4) 对每一个 $a \in G$ 都有 $\Phi^*(ua) = \mathrm{ad}(a^{-1})(\Phi^*(u))$;

(5) 对于每个整数 m, 集合 $\{\pi(u) \in M; \dim \Phi^*(u) \leqslant m\}$ 是开的.

对于 (5), 我们给出如下说明: 由 (4), $\dim \Phi^*(u)$ 在 P 的每一纤维上为常数, 因而可以把它看作 M 上的整数值函数. 那么 (5) 意味着该整数值函数是上半连续的.

定理 10.2 令 $\mathfrak{g}(u)$ 和 $\mathfrak{g}^*(u)$ 分别是 $\Phi^0(u)$ 和 $\Phi^*(u)$ 的 Lie 代数, 那么 $\Phi^0(u)$ 是由所有 $\Phi^*(v)(v \in P(u))$ 生成的而 $\mathfrak{g}(u)$ 是由所有 $\mathfrak{g}^*(v)(v \in P(u))$ 张成的.

证明 若 $v \in P(u)$, 则 $\Phi^0(u) = \Phi^0(v) \supset \Phi^*(v)$ 且 $\mathfrak{g}(u) = \mathfrak{g}(v) \supset \mathfrak{g}^*(v)$. 由定理 8.1, $\mathfrak{g}(u)$ 是所有形如 $\Omega_v(X^*,Y^*)$ 的元素张成的, 其中 $v \in P(u)$ 且 X^* 和 Y^* 是 v 点处的水平向量. 因为对 $\pi(v)$ 的每个连通开邻域 V, $\Omega_v(X^*,Y^*)$ 包含在 $\Phi^0(v,V)$ 的 Lie 代数中, 因而包含在 $\mathfrak{g}^*(v)$ 中. 所以 $\mathfrak{g}(u)$ 是由所有 $\mathfrak{g}^*(v)$ 张成的, 其中 $v \in P(u)$. 于是第一个论断可从下列引理得出. 证毕.

引理 若连通 Lie 群 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是由一族子空间 $\{\mathfrak{m}_\lambda\}$ 生成的, 那么 G 的每个元均可写为乘积 $\exp X_1 \cdot \exp X_2 \cdot \cdots \cdot \exp X_k$, 其中每个 X_i 包含在某个 $\mathfrak{m}_\lambda$ 中.

引理的证明 G 的具有上面形式的所有元素的集合 H 显然是一个弧连通的子群; 实际上, H 的每个元素均可由一条位于 H 中的可微曲线连接到单位元上. 由在附录 4 中证明的 Freudenthal-Kuranishi-Yamabe 定理, H 是 G 的一个连通 Lie 子群, 它的 Lie 代数包含所有 $\mathfrak{m}_\lambda$ 因而与 $\mathfrak{g}$ 一致, 从而 $H=G$. 证毕.

定理 10.3 如果 $\dim \Phi^*(u)$ 在 P 上为常数, 那么对 P 中的每个 u 都有 $\Phi^0(u) = \Phi^*(u)$.

证明 由命题 10.1 的 (3), $x = \pi(u)$ 有一个邻域 U 使得 $\Phi^*(u) \supset \Phi^*(v)$ 对 $P(u,U)$ 中每一点 v 成立. 因为 $\dim \Phi^*(u) = \dim \Phi^*(v)$, 所以有 $\Phi^*(u) = \Phi^*(v)$. 由标准的继续论证可以看出, 若 $v \in P(u)$ 则 $\Phi^*(u) = \Phi^*(v)$. 由定理 10.2 得出 $\Phi^0(u) = \Phi^*(u)$. 证毕.

现在我们用曲率形式定义 P 的每一点 u 处的无穷小和乐群并研究它与局部和乐群的关系. 首先用关于 k 的归纳法来定义 $\mathfrak{g}$ 的一系列子空间 $\mathfrak{m}_k(u)$. 令 $\mathfrak{m}_0(u)$ 是所有形如 $\Omega_u(X,Y)$ 的元素张成的 $\mathfrak{g}$ 的子空间, 其中 X 和 Y 是 u 点处的水平向量. 考虑 P 上形如

$$(I_k) \qquad f = V_k \cdots V_1(\Omega(X,Y))$$

的 $\mathfrak{g}$ 值函数 f, 其中 $X, Y, V_1, \cdots, V_k$ 是 P 上的任意水平向量场. 令 $\mathfrak{m}_k(u)$ 是由 $\mathfrak{m}_{k-1}(u)$ 和所有形如 (I_k) 的函数 f 在 u 点的值张成的 $\mathfrak{g}$ 的子空间. 然后再置 $\mathfrak{g}'(u)$ 是所有 $\mathfrak{m}_k(u)(k = 0, 1, \cdots)$ 的并.

命题 10.4 $\mathfrak{g}$ 的子空间 $\mathfrak{g}'(u)$ 是 $\mathfrak{g}^*(u)$ 的子代数.

由 $\mathfrak{g}'(u)$ 所生成的 G 的连通 Lie 子群 $\Phi'(u)$ 称为 u 点无穷小和乐群.

证明 我们用关于 k 的归纳法证明 $\mathfrak{m}_k(u) \subset \mathfrak{g}^*(u)$. $k = 0$ 的情况是明显的. 假设对每一点 u, $\mathfrak{m}_{k-1}(u) \subset \mathfrak{g}^*(u)$ 成立. 只要证明对每个水平向量场 X 和每个 (I_{k-1}) 形的函数 f 都有 $X_u f \in \mathfrak{g}^*(u)$ 就行了. 令 u_t(对某个 $\varepsilon > 0$, $|t| < \varepsilon$) 是 X 的满足 $u_0 = u$ 的积分曲线. 因为 u_t 是水平的, 所以由命题 10.1 的 (3) 有 $\mathfrak{g}^*(u_t) \subset \mathfrak{g}^*(u)$. 因此 $f(u_t) \in \mathfrak{m}_{k-1}(u_t) \subset \mathfrak{g}^*(u_t) \subset \mathfrak{g}^*(u)$. 另一方面, $X_u f = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t}[f(u_t) - f(u)]$ 因而 $X_u f$ 在 $\mathfrak{g}^*(u)$ 中. 所以 $\mathfrak{g}'(u)$ 包含在 $\mathfrak{g}^*(u)$ 中. 证毕.

为证明 $\mathfrak{g}'(u)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数, 我们需要下列两个引理.

引理 1 令 f 是 P 上的 $\mathrm{ad}G$ 型的 $\mathfrak{g}$ 值函数. 那么

(1) 对于 P 上的任何向量场 X 都有 $v(X)_u \cdot f = -[\omega_u(X), f(u)]$, 其中 $v(X)$ 表示 X 的垂直分量.

(2) 对 P 上的任何水平向量场 X 和 Y 都有

$$v([X,Y]_u) \cdot f = 2[\Omega_u(X,Y), f(u)].$$

(3) 若 X 和 Y 是 P 上的向量场而且都是在所有 $R_a (a \in G)$ 作用之下不变的, 那么 $\Omega(X,Y)$ 和 Xf 都是 $\mathrm{ad}G$ 型函数.

引理 1 的证明 (1) 令 $A = \omega_u(X) \in \mathfrak{g}$ 且 $a_t = \exp tA$. 那么

$$v(X)_u \cdot f = A_u^* f = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(ua_t) - f(u)]$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\mathrm{ad}(a_t^{-1})(f(u)) - f(u)]$$
$$= -[A, f(u)] = -[\omega_u(X), f(u)].$$

(2) 借助于结构方程 (定理 5.2) 得

$$\begin{aligned}2\Omega_u(X,Y) &= 2(d\omega)_u(X,Y)\\ &= X_u(\omega(Y)) - Y_u(\omega(X)) - \omega_u([X,Y])\\ &= -\omega_u([X,Y]).\end{aligned}$$

在 (1) 中用 $[X,Y]$ 代替 X 则得出 (2).

(3) 因为 Ω 是 $\mathrm{ad}G$ 型的 (参看第二章 2.5 节), 因而有

$$\Omega_{ua}(R_aX, R_aY) = \mathrm{ad}(a^{-1})(\Omega_u(X,Y)).$$

这说明若 $X = R_aX$ 且 $Y = R_aY$, 则 $\Omega(X,Y)$ 是 $\mathrm{ad}G$ 型的. 若 f 是 $\mathrm{ad}G$ 型的并且 X 是经 R_a 作用不变的, 那么又有

$$\begin{aligned}(Xf)_{ua} &= X_{ua}f = (R_aX_u)f = X_u(f\circ R_a)\\ &= \mathrm{ad}(a^{-1})(X_uf) = \mathrm{ad}(a^{-1})(Xf)_u.\end{aligned}$$

这就完成了引理 1 的证明.　证毕.

令 $X_i = \partial/\partial x^i$, 这里 $x^1,\cdots,x^n$ 是 $x = \pi(u)$ 的邻域 U 中的局部坐标系. 令 X_i^* 是 X_i 的水平提升. 考虑形如

$$(II_k)\qquad f = X_{j_k}^*\cdots X_{j_1}^*(\Omega(X_i^*, X_l^*))$$

的 $\mathfrak{g}$ 值函数 f, 其中 $i,l,j_1,\cdots,j_k$ 是从 $1,\cdots,n$ 中随意选取的.

引理 2　对每一个 k, $\mathfrak{m}_k(u)$ 是由 $\mathfrak{m}_{k-1}(u)$ 和所有形如 (II_k) 的函数 f 在 u 点的值张成的.

引理 2 的证明　用关于 k 的归纳法证明. $k=0$ 的情况是明显的. $\pi^{-1}(U)$ 上的每一个水平向量场都是 $X_1^*,\cdots,X_n^*$ 的以实值函数为系数的线性组合. 由此可知, 在 u 的邻域上, 每个 (I_k) 型函数 f 都是 $(II_k)(s\leqslant k)$ 型函数以实值函数为系数的线性组合. 那么显然, 若结论对 $k-1$ 成立, 则它对 k 也成立.

现在我们通过对所有整数对 k 和 s 建立关系 $[\mathfrak{m}_k(u), \mathfrak{m}_s(u)] \subseteq \mathfrak{m}_{k+s+2}(u)$ 来证明 $\mathfrak{g}'(u)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数. 依据引理 2, 只需证明对于每个 (I_s) 型函数 f 和每个 (II_k) 型函数 g, 函数 $[f,g](u) = [f(u), g(u)]$ 是 $(I_r)(r\leqslant k+s+2)$ 型函数以实值函数为系数的线性组合. 用关于 s 的归纳法来证明.

令 $s=0$ 并且令 $f(u)=\Omega_u(X,Y)$, 其中 X,Y 为水平向量场. 因为 g 是 ad$G$ 型的, 所以由引理 1 的 (2) 得

$$2[\Omega_u(X,Y),g(u)]=v([X,Y])_u\cdot g.$$

另一方面又有

$$\begin{aligned}v([X,Y])_u\cdot g&=[X,Y]_u\cdot g-h([X,Y])_u\cdot g\\&=X_u(Yg)-Y_u(Xg)-h([X,Y])u\cdot g\end{aligned}$$

其中 $h[X,Y]$ 表示 $[X,Y]$ 的水平分量. 函数 $X(Yg)$ 和 $Y(Xg)$ 是 (I_{k+2}) 型的而函数 $h([X,Y])g$ 是 (I_{k+1}) 型的. 这证明对于 $s=0$ 和任意的 k, 结论成立.

现在假设结论对 $s-1$ 和一切 k 成立. 每个 (I_s) 型函数都能写成 Xf, 其中 f 是 (I_{s-1}) 型函数而 X 是水平向量场. 令 g 是任意一个 (II_k) 型函数, 那么

$$[X_uf,g(u)]=X_u([f\cdot g])-[f(u),X_ug].$$

由归纳假设函数 $[f,Xg]$ 是 $(I_r)(r\leqslant k+s+1)$ 型函数的线性组合. 同样由归纳假设函数 $X[f,g]$ 是 $(I_r)(r\leqslant k+s+2)$ 型函数的线性组合. 因而函数 $[Xf,g]$ 是 $(I_r)(r\leqslant s+k+2)$ 型函数的线性组合.　证毕.

命题 10.5　无穷小和乐群具有下列性质;

(1) $\Phi'(u)$ 是局部和乐群 $\Phi^*(u)$ 的连通 Lie 子群;

(2) $\Phi'(ua)=\mathrm{ad}(a^{-1})(\Phi'(u))$ 且 $\mathfrak{g}'(ua)=\mathrm{ad}(a^{-1})(\mathfrak{g}'(u))$;

(3) 对于每个整数 m, 集合 $\{\pi(u)\in M;\dim\Phi'(u)\geqslant m\}$ 是开的;

(4) 若在每一点 u, $\Phi'(u)=\Phi^*(u)$, 那么存在 $x=\pi(u)$ 的一个连通开邻域 U 使得 $\Phi'(v)=\Phi^*(v)=\Phi'(u)=\Phi^*(u)$ 对于每个 $v\in P(u,U)$ 成立.

证明　由命题 10.4, (1) 是明显的. (2) 可从下列引理 1 得出.　证毕.

引理 1　对于每个 k 都有 $\mathfrak{m}_k(ua)=\mathrm{ad}(a^{-1})(\mathfrak{m}_k(u))$.

引理 1 的证明　用关于 k 的归纳法证明. $k=0$ 的情形是下列事实的推论: Ω 是 ad$G$ 型的. 假设结论对 $k-1$ 成立. 由命题 10.4 中引理 1 的 (3), 每个 (II_k) 形的函数是 ad$G$ 型的. 于是本引理从命题 10.4 的引理 2 得出.

(2) 意味着 $\Phi'(u)$ 可以看作 M 上的函数. (3) 是下列事实的推论: 若有限个 (I_k) 型函数在一点 u 的值是线性无关的, 那么它们在 u 的一个邻域的每一点处都是线性无关的. 注意到 (3) 意味着 $\dim\Phi'(u)$ 看作 M 上的函数是下半连续的. 为证明 (4), 假设在一点 u 处, $\Phi'(u)=\Phi^*(u)$. 因为 $\dim\Phi'(u)$ 是下半连续的而 $\dim\Phi^*(u)$ 是上半连续的 (参看命题 10.1 的 (5)), 所以点 $x=\pi(u)$ 有一个邻域 U 使得对于 $v\in\pi^{-1}(U)$,

$$\dim\Phi'(v)\geqslant\dim\Phi'(u),\quad \dim\Phi^*(v)\leqslant\dim\Phi^*(u).$$

另一方面, 对于每个 $v \in \pi^{-1}(U)$, $\Phi^*(v) \supset \Phi'(v)$. 因此

$$\dim \Phi^*(v) = \dim \Phi'(v) = \dim \Phi^*(u) = \dim \Phi'(u),$$

所以 $\Phi^*(v) = \Phi'(v)$ 对每一个 $v \in \pi^{-1}(U)$ 成立. 将定理 10.3 应用于 $P|_U$, 则可以看出 $\Phi^0(u,U) = \Phi^*(u)$ 和 $\Phi^0(v,U) = \Phi^*(v)$. 若 $v \in P(u,U)$, 那么 $\Phi^0(u,U) = \Phi^0(v,U)$ 因而 $\Phi^*(u) = \Phi^*(v)$. 　证毕.

定理 10.6　若 $\dim \Phi'(v)$ 在 P 中 u 的一个邻域上为常数, 那么 $\Phi'(u) = \Phi^*(u)$.

证明　首先证明存在 $x = \pi(u)$ 点的一个开邻域 U 使得对每个 $v \in P(u,U)$, $\mathfrak{g}'(u) = \mathfrak{g}'(v)$. 令 $f_1, \cdots, f_s$ 是有限个 (II_k) 形的函数并且使得 $f_1(u), \cdots, f_s(u)$ 构成 $\mathfrak{g}'(u)$ 的基. 在 u 的一个小邻域中的每一点 v 处 $f_1(v), \cdots, f_s(v)$ 是线性无关的, 由假设, 它们构成 $\mathfrak{g}'(v)$ 的一个基. 因为 $f_1, \cdots, f_s$ 都是 $\mathrm{ad}G$ 型的, 所以 $f_1(va), \cdots, f_s(va)$ 构成 $\mathfrak{g}'(va) = \mathrm{ad}(a^{-1})(\mathfrak{g}'(v))$ 的基. 这意味着存在 $x = \pi(u)$ 点的一个邻域 U 使得对于每个 $v \in \pi^{-1}(U)$, $f_1(v), \cdots, f_s(u)$ 均构成 $\mathfrak{g}'(v)$ 的基. 现在令 v 是 $P(u,U)$ 的任意一点, 并且令 $u_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是 $\pi^{-1}(U)$ 中从 u 到 v 的一条水平曲线使得 $u = u_0$ 且 $v = u_1$. 可以假定 u_t 是可微的; u_t 是分段可微的情况容易得出. 置 $g_i(t) = f_i(u_t)(i = 1, \cdots, s)$ 且 $X = \dot{u}_t$. 因为 X 是水平的, 从而有

$$\left(\frac{dg_i}{dt}\right)_t = (Xf_i)(u_t) \in \mathfrak{g}'(u_t), \quad i = 1, \cdots, s.$$

因为 $g_1(t), \cdots, g_s(t)$ 构成 $\mathfrak{g}'(u_t)$ 的基, 所以 dg_i/dt 可以表示成

$$\left(\frac{dg_i}{dt}\right)_t = \sum_{j=1}^{s} A_{ij}(t) g_j(t),$$

其中 $A_{ij}(t)$ 是 t 的连续函数. 由命题 3.1 的引理, 在 $GL(s;\mathbf{R})$ 中存在唯一的一条曲线 $(a_{ij}(t))_{i,j=1,\cdots,s}$ 使得

$$\frac{da_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^{s} A_{ik} a_{kj} \quad 且 \quad a_{ij}(0) = \delta_{ij}.$$

(注意到 $(A_{ij}(t)) \in \mathfrak{gl}(s;\mathbf{R})$ 相应于命题 3.1 的引理中的 $Y_t \in T_e(G)$.) 令 $(b_{ij}(t))$ 是 $(a_{ij}(t))$ 的逆矩阵, 因而

$$\frac{db_{ij}}{dt} = -\sum_{k=1}^{s} b_{ik} A_{kj}.$$

于是

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{s} b_{ij} g_j\right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{db_{ij}}{dt}\right) g_j + \sum_{k=1}^{s} b_{ik} \left(\frac{dg_k}{dt}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{db_{ij}}{dt} + \sum_{k=1}^{s} b_{ik} A_{kj} \right) g_j = 0.$$

因为 $b_{ij}(0) = \delta_{ij}$, 所以

$$\sum_{j=1}^{s} b_{ij}(t) g_j(t) = g_i(0).$$

这意味着 $\mathfrak{g}'(u_t) = \mathfrak{g}'(u)$, 特别地, $\mathfrak{g}'(v) = \mathfrak{g}'(u)$.

取 U 充分小, 则可假定对每个 $v \in P(u, U)$,

$$\mathfrak{g}^*(u) \supset \mathfrak{g}^*(v) \supset \mathfrak{g}'(v) \supset \mathfrak{m}_0(v).$$

由定理 8.1, $\Phi^0(u, U)$ 的 Lie 代数是由所有 $\mathfrak{m}_0(v)(v \in P(u, U))$ 张成的. 更不必说 $\mathfrak{g}^*(u)$ 是所有 $\mathfrak{g}'(v)(v \in P(u, U))$ 张成的. 因为像刚才所证明的那样对于每个 $v \in P(u, U)$, $\mathfrak{g}'(v) = \mathfrak{g}'(u)$, 因而可以推出 $\mathfrak{g}^*(u) = \mathfrak{g}'(u)$ 和 $\Phi^*(u) = \Phi'(u)$. 证毕.

推论 10.7 若 $\dim \Phi'(u)$ 在 P 上为常数, 那么 $\Phi^0(u) = \Phi^*(u) = \Phi'(u)$.

证明 本推论可从定理 10.3 和 10.6 得出. 证毕.

定理 10.8 对于实解析主纤维丛上的实解析联络, 则有 $\Phi^0(u) = \Phi^*(u) = \Phi'(u)$ 对每个 $u \in P$ 成立.

证明 我们可以假定 $P = P(u)$, 特别假定 P 是连通的. 只需证明 $\dim \Phi'(u)$ 局部为常数即可. 那么由此可知 $\dim \Phi'(u)$ 在 P 上为常数并且由推论 10.7, $\Phi^0(u) = \Phi^*(u) = \Phi'(u)$ 对于每个 $u \in P$ 成立. 令 $x^1, \cdots, x^n$ 是一个以 $x = \pi(u)$ 为原点的实解析局部坐标系. 令 U 是对某个 $a > 0$ 由 $\sum_i (x^i)^2 < a^2$ 给出的 x 的一个坐标邻域. 我们要证明 $\dim \Phi'(u)$ 在 $\pi^{-1}(U)$ 上为常数. 令 $X_i = \partial/\partial x^i$ 并且 X_i^* 是 X_i 的水平提升. 对于适合 $\sum_i (a^i)^2 = 1$ 的任何数组 $(a^1, \cdots, a^n)$, 考虑 U 上的向量场 $X = \sum_i a^i X_i$. 令 x_t 是由 $x^i(t) = a^i t$ 给定的射线并且令 u_t 是 x_t 的水平提升使得 $u = u_0$. 我们要证明 $\mathfrak{g}'(u) = \mathfrak{g}'(u_t)$ 对适合 $|t| < a$ 的一切 t 成立. 证毕.

考虑在 $\pi^{-1}(U)$ 上定义的所有 $(II_k)(k \geqslant 0)$ 型函数 f:

$$f = X_{j_k}^* \cdots X_{j_1}^* (\Omega(X_i^*, X_l^*)).$$

置 $h(t) = f(u_t)$. 那么 $h(t)$ 是 t 的解析函数. 对于适合 $|t_0| < a$ 的每个 t_0 都存在 $\delta > 0$ 使得所有函数 $h(t)$ 都能在一个公共邻域 $|t - t_0| < \delta$ 内表示成 Taylor 级数:

$$h(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (t - t_0)^m h^{(m)}(t_0),$$

$$h(t_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(t_0 - t)^m h^{(m)}(t).$$

如果 X^* 是 X 的水平提升, 那么可以写成 $h'(t) = X^*_{u_t} f$, $h''(t) = X^*_{u_t}(X^* f)$ 等等. 这种对所有 $h(t)$ 通用的 δ 的存在性可从下面将要证明的引理得出. 于是若 $|t - t_0| < \delta$, 则所有 $h^{(m)}(t)$ 属于 $\mathfrak{g}'(u_{t_0})$. 第一个幂级数说明 $\mathfrak{g}'(u_t)$ 包含在 $\mathfrak{g}'(u_{t_0})$ 中; 类似地, 第二个幂级数说明 $\mathfrak{g}'(u_{t_0})$ 包含在 $\mathfrak{g}'(u_t)$ 中. 这意味着对 $|t - t_0| < \delta$, $\mathfrak{g}'(u_t) = \mathfrak{g}'(u_{t_0})$. 标准的继续论证说明对于适合 $|t| < a$ 的每个 t, $\mathfrak{g}'(u_t) = \mathfrak{g}'(u)$. 从而就证明了定理.

引理 在一个实解析流形上. 令 x_t 是一实解析向量场 X 的积分曲线且使得 $x_0 = x$(其中 $X_x \neq 0$). 对任何实解析函数 g 和有限个实解析向量场 $X_1, \cdots, X_s$, 考虑下列形式的所有函数:

$$f(x) = (X_{j_k} \cdots X_{j_1} g)(x)$$

$$h(t) = f(x_t),$$

其中 $j_1, \cdots, j_k$ 是从 $1, 2, \cdots, s$ 中任意选取的. 那么存在 $\delta > 0$ 使得各函数 $h(t)$ 能够在一个公共邻域 $|t| < \delta$ 内展开成幂级数如下: $h(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} h^{(m)}(0)$.

证明 由于 $X_x \neq 0$, 因而可在 x 的邻域中取一个局部坐标系 $x^1, \cdots, x^n$, 使得在 x 的邻域中 $X = \partial/\partial x^1$ 且 $x_t = (t, 0, \cdots, 0)$. 上面 $h(t)$ 的展开式无非是将 $f(x)$ 展开成 x^1 的幂级数表达式. 每个 X_i 都具有 $x_i = \sum_j f_{ij}(\partial/\partial x^j)$ 的形式. 因为 f 和 f_{ij} 都是实解析的, 所以对于某个 $a > 0$, 它们都能在一个公共邻域 $|x^i| < a$ 中展开成 $(x^1, \cdots, x^n)$ 的幂级数. 于是本引理即可从下列事实得出: 如果 f_1 和 f_2 都是能在邻域 $|x^i| < a$ 中展开成 $x^1, \cdots, x^n$ 的幂级数的实解析函数, 那么函数 $f_1 f_2$ 和 $\partial f_1/\partial x^j$ 都能在同一邻域中展开成幂级数. 证毕.

本节的结果归功于 Ozeki[1].

2.11 不变联络

在论述一般不变联络之前, 先考虑一种重要的特殊情况.

定理 11.1 令 G 是一个连通 Lie 群并且 H 是 G 的一个闭子群. 令 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 分别是 G 和 H 的 Lie 代数.

(1) 若存在 $\mathfrak{g}$ 的一个子空间 $\mathfrak{m}$ 使得 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$(为直和) 并且 $\mathrm{ad}(H)\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, 那么 G 的标准 1 形式 θ(参看第一章 1.4 节) 关于分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ 的 $\mathfrak{h}$ 分量 ω 在从 $G(G/H, H)$ 上定义一个联络而且该联络在 G 的左平移下是不变的.

(2) 反过来, $G(G/H,H)$ 上任何在 G 的左平移下不变的联络 (如果存在) 决定这样一个分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ 而且可按 (1) 中所描述的方式得出;

(3) 在 (1) 中由 ω 定义的不变联络的曲率形式 Ω 由下式给出:

$$\Omega(X,Y)=-\frac{1}{2}[X,Y]_{\mathfrak{h}},\quad (-\frac{1}{2}[X,Y]\in\mathfrak{g}\text{的}\mathfrak{h}\text{分量}),$$

其中 X 和 Y 是 G 上属于 $\mathfrak{m}$ 的任意左不变向量场;

(4) 令 $\mathfrak{g}(e)$ 是 (1) 中定义的不变联络的以 e(单位元) 为基点的和乐群 $\Phi(e)$ 的 Lie 代数. 那么 $\mathfrak{g}(e)$ 是由形如 $[X,Y]_{\mathfrak{h}}(X,Y\in\mathfrak{m})$ 的所有元素张成的.

证明 (1) 本款的证明是直接的并且类似于命题 6.4 的证明. 在 $\mathfrak{g}\approx T_e(G)$ 等同之下, 子空间 $\mathfrak{m}$ 对应于 e 点的水平子空间.

(2) 令 ω 是 $G(G/H,H)$ 上经 G 的左平移不变的联络形式. 令 $\mathfrak{m}$ 是 G 上使得 $\omega(X)=0$ 的左不变向量场的集合. 容易验证 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ 就是所要求的分解.

(3) 一个左不变向量场是水平的当且仅当它是 $\mathfrak{m}$ 中的元素. 于是 (3) 可从推论 5.3 得出.

(4) 令 $\mathfrak{g}_1$ 是由集合 $\{\Omega_e(X,Y);X,Y\in\mathfrak{m}\}$ 张成的 $\mathfrak{g}$ 的子空间; 令 $\mathfrak{g}_2$ 是由集合 $\{\Omega_u(X,Y);X,Y\in\mathfrak{m}\text{ 且 }u\in G\}$ 张成的 $\mathfrak{g}$ 的子空间. 由定理 8.1, 有 $\mathfrak{g}_1\subset\mathfrak{g}(e)\subset\mathfrak{g}_2$. 另一方面又有 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}_2$, 因为对任何 $X,Y\in\mathfrak{m}$ 和 $u\in G$, $\Omega_u(X,Y)=\Omega_e(X,Y)$. 于是 (4) 从 (3) 得出. 证毕.

评注 (1) 可以看作命题 6.4 的特殊情况. 令 $P=(G/H)\times G$ 是 G/H 上以 G 为结构群的平凡丛. 可以通过由

$$f(u)=(\pi(u),u),\quad u\in G$$

定义的映射 f 把丛 $G(G/H,H)$ 嵌入到 P 中, 其中 $\pi:G\to G/H$ 是自然射影. 令 φ 是定义 P 上的标准平坦联络 (参看 2.9 节) 的形式. 它的 $\mathfrak{h}$ 分量 (在子丛 $G(G/H,H)$ 上的限制) 定义一个联络 (命题 6.4) 并且与 (1) 中的形式 ω 一致.

现在回到一般情况, 首先证明下列命题, 它在许多应用中是基本的.

命题 11.2 令 φ_t 是主纤维丛 $P(M,G)$ 的单参数自同构群而 X 是 P 上由 φ_t 诱导的向量场. 令 Γ 是 P 上的一个经 φ_t 作用不变的联络. 对 P 的任意一点 u_0, 分别定义曲线 u_t, x_t, v_t, 和 a_t 如下:

$$\begin{aligned}&u_t=\varphi_t(u_0),\quad x_t=\pi(u_t),\\&v_t=x_t\text{的水平提升且使得}v_0=u_0,\\&u_t=v_ta_t.\end{aligned}$$

那么 a_t 是由 $A=\omega_{u_0}(X)$ 生成的 G 的单参数子群, 其中 ω 为 Γ 的联络形式.

证明　正如在命题 3.1 的证明中那样有

$$\omega(\dot{u}_t) = (\mathrm{ad}(a_t^{-1}))\omega(\dot{v}_t) + a_t^{-1}\dot{a}_t.$$

因为 v_t 是水平的, 所以有 $\omega(\dot{u}_t) = a_t^{-1}\dot{a}_t$. 另一方面, 因为联络形式 ω 是在 φ_t 作用下不变的, 所以有 $\dot{u}_t = \varphi_t(X_{u_0})$ 从而 $\omega(\dot{u}_t) = \omega(X_{u_0}) = A$. 因而得 $a_t^{-1}\dot{a}_t = A$. 证毕.

令 K 是作为自同构群作用在主纤维丛 $P(M,G)$ 上的一个 Lie 群. 令 u_0 是 P 的任意一点并将它选作基点. K 的每一个元素自然诱导 M 的一个变换. K 的所有使 M 的点 $x_0 = \pi(u_0)$ 成为不动点的元素的集合 J 构成 K 的一个闭子群, 称为 K 在 x_0 点的迷向子群. 定义一个同态 $\lambda : J \to G$ 如下. 对每个 $j \in J$, ju_0 是跟 u_0 在同一纤维中的点, 因而对于某个 $a \in G$ 具有 $ju_0 = u_0 a$ 的形式. 定义 $\lambda(j) = a$. 若 $j, j' \in J$, 那么

$$\begin{aligned} u_0\lambda(jj') &= (jj')u_0 = j(u_0\lambda(j')) = (ju_0)\lambda(j') \\ &= (u_0\lambda(j))\lambda(j') = u_0(\lambda(j)\lambda(j')). \end{aligned}$$

从而 $\lambda(jj') = \lambda(j)\lambda(j')$, 这说明 $\lambda : J \to G$ 是一个同态. 同样容易验证 λ 是可微的. 诱导的 Lie 代数同态 $\mathfrak{j} \to \mathfrak{g}$ 仍用同一 λ 表示. 请注意到 λ 依赖于 u_0 的选取, 因此基点 u_0 一旦被选定, 则贯穿于本节将是固定不变的.

命题 11.3　令 K 是 $P(M,G)$ 的自同构群且 Γ 是 P 的经 K 作用不变的联络. 用

$$\Lambda(X) = \omega_{u_0}(\tilde{X}), \quad X \in \mathfrak{k},$$

定义一个线性映射 $\Lambda : \mathfrak{k} \to \mathfrak{g}$, 其中 $\tilde{X}$ 是由 X 诱导的 P 上的向量场, 那么

(1) 对于 $X \in \mathfrak{j}$, $\Lambda(X) = \lambda(X)$;

(2) 对于 $j \in J$ 和 $X \in \mathfrak{k}$, $\Lambda(\mathrm{ad}(j)(X)) = \mathrm{ad}(\lambda(j))(\Lambda(X))$, 其中 $\mathrm{ad}(j)$ 是 J 在 $\mathfrak{k}$ 中的伴随表示而 $\mathrm{ad}(\lambda(j))$ 是 G 在 $\mathfrak{g}$ 中的伴随表示.

注意到 $\Lambda(X)$ 的几何意义由命题 11.2 给出.

证明　(1) 将命题 11.2 应用于由 X 生成的 K 的单参数子群 φ_t, 如果 $X \in \mathfrak{j}$, 那么曲线 $x_t = \pi(\varphi_t(u_0))$ 退化为一点 $x_0 = \pi(u_0)$. 因此有 $\varphi_t(u_0) = u_0\lambda(\varphi_t)$. 比较轨道 $\varphi_t(u_0)$ 和 $u_0\lambda(\varphi_t)$ 在 u_0 点的切向量, 则得到 $\Lambda(X) = \lambda(X)$.

(2) 令 $X \in \mathfrak{k}$ 且 $j \in J$. 置 $Y = \mathrm{ad}(j)(X)$. 那么 Y 生成把 u_0 映射成 $j\varphi_t j^{-1}(u_0) = j\varphi_t(u_0\lambda(j^{-1})) = j(R_{\lambda(j^{-1})}\varphi_t u_0)$ 的单参数子群 $j\varphi_t j^{-1}$. 由此可得 $\tilde{Y}_{u_0} = j(R_{\lambda(j^{-1})}\tilde{X}_{u_0})$. 因为联络形式 ω 是经 j 作用不变的, 所以有

$$\omega_{u_0}(\tilde{Y}) = \omega_{u_0}(j(R_{\lambda(j^{-1})}\tilde{X}_{u_0})) = \omega_{j^{-1}u_0}(R_{\lambda(j^{-1})}\tilde{X}_{u_0})$$

$$= \mathrm{ad}(\lambda(j))(\omega_{u_0}(\tilde{X}_{u_0})) = \mathrm{ad}(\lambda(j))(\Lambda(X)). \quad \text{证毕.}$$

命题 11.4 沿用命题 11.3 的记号, 则 Γ 的曲率形式 Ω 满足下列条件:

$$2\Omega_{u_0}(\tilde{X},\tilde{Y}) = [\Lambda(X),\Lambda(Y)] - \Lambda([X,Y]), \quad X,Y \in \mathfrak{k}.$$

证明 从结构方程 (定理 5.2) 和第一章命题 3.11 得

$$\begin{aligned} 2\Omega(\tilde{X},\tilde{Y}) &= 2d\omega(\tilde{X},\tilde{Y}) + [\omega(\tilde{X}),\omega(\tilde{Y})] \\ &= \tilde{X}(\omega(\tilde{Y})) - \tilde{Y}(\omega(\tilde{X})) - \omega([\tilde{X},\tilde{Y}]) + [\omega(\tilde{X}),\omega(\tilde{Y})]. \end{aligned}$$

因为 ω 是经 K 作用不变的, 所以由第一章命题 3.2 的 (c)(也可参看第一章命题 3.5) 就有

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\omega(\tilde{Y})) - \omega([\tilde{X},\tilde{Y}]) = (L_{\tilde{X}}\omega)(\tilde{Y}) = 0, \\ \tilde{Y}(\omega(\tilde{X})) - \omega([\tilde{Y},\tilde{X}]) = (L_{\tilde{Y}}\omega)(\tilde{X}) = 0. \end{aligned}$$

现在注意到映射 $X \in \mathfrak{k} \to \tilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$ 是由 K 在 P 上的左作用所诱导的, 因此满足条件 $\widetilde{[X,Y]} = -[\tilde{X},\tilde{Y}]$(与第一章命题 4.1 中的情况相反, 在那里群的作用是右作用, 因而有一个 Lie 代数的同态). 于是有

$$\omega_{u_0}([\tilde{X},\tilde{Y}]) = \omega_{u_0}(-\widetilde{[X,Y]}) = -\Lambda([X,Y]),$$

所以

$$2\Omega_{u_0}(X,Y) = [\Lambda(X),\Lambda(Y)] - \Lambda([X,Y]). \quad \text{证毕.}$$

若对 P 的任何两条纤维都有 K 的一个元素将其中的一条纤维映射成另一条纤维, 即 K 在底流形 M 上的作用是可迁的, 则称 K 纤维可迁地作用于 P 上. 如果 J 是 K 在 $x_0 = \pi(u_0)$ 点的迷向群如上, 那么 M 是齐性空间 K/J.

下列结果归功于 Wang(王宪钟) [1].

定理 11.5 若连通 Lie 群 K 是从 $P(M,G)$ 上的纤维可迁的自同构群并且 J 是 K 在 $x_0 = \pi(u_0)$ 点的迷向群, 那么在 P 上的 K 不变联络的集合与满足命题 11.3 的两个条件的线性映射 $\Lambda : \mathfrak{k} \to \mathfrak{g}$ 的集合之间有一个一一对应, 这个对应是由

$$\Lambda(X) = \omega_{u_0}(\tilde{X}), \quad X \in \mathfrak{k}$$

给出的, 其中 $\tilde{X}$ 是由 X 诱导的 P 上的向量场.

证明 根据命题 11.3, 只需证明对满足命题 11.3 的 (1) 和 (2) 的每个 $\Lambda : \mathfrak{k} \to \mathfrak{g}$ 在 P 上有一个 K 不变的联络形式 ω 使得 $\Lambda(X) = \omega_{u_0}(\tilde{X})$ 对于 $X \in \mathfrak{k}$ 成立. 令

$X^* \in T_u(P)$. 由于 K 是纤维可迁的, 因而可以写成

$$u_0 = kua = k \circ R_a u,$$
$$k \circ R_a X^* = \tilde{X}_{u_0} + A^*_{u_0},$$

其中 $k \in K$, $a \in G$, $X \in \mathfrak{k}$ 且 A^* 是对应于 $A \in \mathfrak{g}$ 的基本向量场, 然后再令

$$\omega(X^*) = \mathrm{ad}(a)(\Lambda(X) + A).$$

我们首先证明 $\omega(X^*)$ 不依赖于 X 和 A 的选取. 令

$$\tilde{X}_{u_0} + A^*_{u_0} = \tilde{Y}_{u_0} + B^*_{u_0}, \quad 其中 Y \in \mathfrak{k}, B \in \mathfrak{g},$$

因而 $\tilde{X}_{u_0} - \tilde{Y}_{u_0} = B^*_{u_0} - A^*_{u_0}$. 从 $\lambda : \mathfrak{j} \to \mathfrak{g}$ 的定义可知 $\lambda(X - Y) = B - A$. 由命题 11.3 的 (1), 有 $\lambda(X - Y) = \Lambda(X - Y) = \Lambda(X) - \Lambda(Y)$. 从而 $\Lambda(X) + A = \Lambda(Y) + B$.

其次证明 $\omega(X^*)$ 也不依赖于 k 和 a 的选取. 令

$$u_0 = kua = k_1 u a_1 \quad (k_1 \in K, a_1 \in G),$$

因而 $k_1 k^{-1} u_0 = u_0 a_1^{-1} a$ 且 $k_1 k^{-1} \in J$. 置 $j = k_1 k^{-1}$. 那么 $\lambda(j) = a_1^{-1} a$. 于是有

$$\begin{aligned} k_1 \circ R_{a_1} X^* &= jk \circ R_{a\lambda(j^{-1})} X^* = j \circ R_{\lambda(j^{-1})}(k \circ R_a X^*) \\ &= j \circ R_{\lambda(j^{-1})}(X^*_{u_0} + A^*_{u_0}) \end{aligned}$$

由第一章命题 1.7, 有

$$j \circ R_{\lambda(j^{-1})}(\tilde{X}_{u_0}) = j(\tilde{X}_{u_0 \lambda(j^{-1})}) = \tilde{Z}_{u_0}, 其中 Z = \mathrm{ad}(j)X.$$

由第一章命题 5.1, 又有

$$\begin{aligned} j \circ R_{\lambda(j^{-1})}(A^*_{u_0}) &= R_{\lambda(j^{-1})}(jA^*_{u_0}) = R_{\lambda(j^{-1})} A_{ju_0} \\ &= R_{\lambda(j^{-1})} A^*_{u_0 \lambda(j)} = C^*_{u_0} \end{aligned}$$

其中 $C = \mathrm{ad}(\lambda(j))(A)$. 从而有

$$k_1 \circ R_{a_1} X^* = \tilde{Z}_{u_0} + C^*_{u_0},$$

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(a_1)(\Lambda(Z) + C) &= \mathrm{ad}(a_1)(\Lambda(\mathrm{ad}(j)(X)) + \mathrm{ad}(\lambda(j))A) \\ &= \mathrm{ad}(a_1)[\mathrm{ad}(\lambda(j))(\Lambda(X) + A)] = \mathrm{ad}(a)(\Lambda(X) + A). \end{aligned}$$

这就证明了 $\omega(X^*)$ 只依赖于 X^* 的论断.

现在证明 ω 是一个联络形式. 令 $X^* \in T_u(P)$ 和 $u_0 = kua$ 如上. 令 b 是 G 的任一元素, 置

$$Y^* = R_b X^* \in T_v(P), \quad \text{其中} v = ub,$$

那么 $u_0 = kub(b^{-1}a) = kv(b^{-1}a)$. 于是有

$$k \circ R_{b^{-1}a} Y^* = k \circ R_{b^{-1}a} R_b X^* = k \circ R_a X^* = (\tilde{X}_{u_0} + A^*_{u_0})$$

因而有

$$\omega(R_b X^*) = \omega(Y^*) = \mathrm{ad}(b^{-1}a)(\Lambda(X) + A) = \mathrm{ad}(b^{-1})(\omega(X^*)),$$

这证明 ω 满足命题 1.1 的条件 (b′). 现在令 A 是 $\mathfrak{g}$ 的任何元素并且令 $u_0 = kua$. 那么

$$k \circ R_a(A^*_u) = R_a \circ k(A^*_u) = R_a(A^*_{ku}) = B^*_{u_0}, \quad \text{其中} B = \mathrm{ad}(a^{-1})(A).$$

从而有

$$\omega(A^*_u) = \mathrm{ad}(a)(B) = A.$$

这说明 ω 满足命题 1.1 的条件 (a′).

为证明 ω 是可微的, 令 u_1 是 P 的任意一点, 并且令 $u_0 = k_1 u_1 a_1$. 考虑纤维丛 $K(M, J)$, 其中 $M = K/J$. 令 $\sigma : U \to K$ 是该丛的一个定义在 $\pi(u_1)$ 的邻域 U 中的局部截面并且使得 $\sigma(\pi(u_1)) = k_1$. 对于每个 $u \in \pi^{-1}(U)$, 定义 $k \in K$ 和 $a \in G$ 为

$$k = \sigma(\pi(u)) \quad \text{和} \quad u_0 = kua.$$

那么 k 和 a 都可微地依赖于 u. 将向量空间 $\mathfrak{k}$ 分解为子空间的直和 $\mathfrak{k} = \mathfrak{j} + \mathfrak{m}$. 对任意一个 $X^* \in T_u(P)$, 置

$$k \circ R_a(X^*) = \tilde{X}_{u_0} + A^*_{u_0}, \quad \text{其中} X \in \mathfrak{m}.$$

那么 X 和 A 都是唯一确定的并且可微地依赖于 X^*. 因而 $\omega(X^*) = \mathrm{ad}(a)(\Lambda(X)+A)$ 可微地依赖于 X^*.

最后证明 ω 是经 K 作用不变的. 令 $X^* \in T_u(P)$ 且 $u_0 = kua$. 令 k_1 是 K 的任意一个元素, 那么 $k_1 X^* \in T_{k_1 u}(P)$ 并且 $u_0 = kk_1^{-1}(k_1 u)a$. 从而有

$$kk_1^{-1} \circ R_a(k_1 X^*) = k \circ R_a(X^*).$$

从 ω 的构造立即看出 $\omega(k_1 X^*) = \omega(X^*)$. 证毕.

K 在 P 上是纤维可迁的情况下, 曲率形式 Ω 不仅是一个 ad$G$ 型张量场 (参看 2.5 节) 并且在 K 的作用下不变, 而且是完全由值 $\Omega_{u_0}(\tilde{X},\tilde{Y})(X,Y\in\mathfrak{k})$ 决定的. 命题 11.4 是用 Λ 表示 $\Omega_{u_0}(\tilde{X},\tilde{Y})$. 作为命题 11.4 和定理 11.5 的结果, 又可得出下列推论.

推论 11.6 P 上由 Λ 定义的 K 不变联络是平坦的当且仅当 $\Lambda:\mathfrak{k}\to\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数的同态.

证明 一个联络是平坦的当且仅当它的曲率形式恒为零 (定理 9.1). 证毕.

定理 11.7 在定理 11.5 中假定 $\mathfrak{k}$ 允许有一个子空间 $\mathfrak{m}$ 使得 $\mathfrak{k}=\mathfrak{j}+\mathfrak{m}$(直和) 且 $\mathrm{ad}(J)(\mathfrak{m})=\mathfrak{m}$, 其中 $\mathrm{ad}(J)$ 是 J 在 $\mathfrak{k}$ 中的伴随表示. 那么

(1) P 上的 K 不变联络的集合与使得

$$\Lambda_{\mathfrak{m}}(\mathrm{ad}(j)(X))=\mathrm{ad}(\lambda(j))(\Lambda_{\mathfrak{m}}(X)),\quad X\in\mathfrak{m},j\in J$$

的线性映射 $\Lambda_{\mathfrak{m}}:\mathfrak{m}\to\mathfrak{g}$ 的集合之间存在一个一一对应. 这个对应是由

$$\Lambda(X)=\begin{cases}\lambda(X), & 若X\in j,\\ \Lambda_{\mathfrak{m}}(X), & 若X\in\mathfrak{m},\end{cases}$$

通过定理 11.5 给出的.

(2) 由 $\Lambda_{\mathfrak{m}}$ 定义的 K 不变联络的曲率形式 Ω 满足下列条件: 对于 $X,Y\in\mathfrak{m}$.

$$2\Omega_{u_0}(\tilde{X},\tilde{Y})=[\Lambda_{\mathfrak{m}}(X),\Lambda_{\mathfrak{m}}(Y)]-\Lambda_{\mathfrak{m}}([X,Y]_{\mathfrak{m}})-\lambda([X,Y]_{\mathfrak{j}}),$$

其中 $[X,Y]_{\mathfrak{m}}([X,Y]_{\mathfrak{j}})$ 表示 $[X,Y]\in\mathfrak{k}$ 的 $\mathfrak{m}$ 分量 ($\mathfrak{j}$ 分量).

证明 令 $\Lambda:\mathfrak{k}\to\mathfrak{g}$ 是一个满足命题 11.3 的 (1) 和 (2) 的线性映射. 令 $\Lambda_{\mathfrak{m}}$ 是 Λ 在 $\mathfrak{m}$ 上的限制. 容易看出 $\Lambda\to\Lambda_{\mathfrak{m}}$ 给出所要求的对应. 结论 (2) 是命题 11.4 的推论. 证毕.

定理 11.7 中由 $\Lambda_{\mathfrak{m}}=0$ 定义的 P 上的 K 不变联络称为 (关于分解 $\mathfrak{k}=\mathfrak{j}+\mathfrak{m}$ 的) 标准联络.

评注 若令 $P(M,G)=G(G/H,H)$ 且 $K=G$, 那么定理 11.1 的 (1) 和 (3) 可从定理 11.7 得出; 定理 11.1 中的不变联络就是刚才定义的标准联络.

最后我们来决定 K 不变联络的和乐群的 Lie 代数.

定理 11.8 沿用定理 11.5 的假设和记号, 那么由 $\Lambda:\mathfrak{k}\to\mathfrak{g}$ 定义的 K 不变联络的和乐群 $\Phi(u_0)$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}(u_0)$ 由下式给出:

$$\mathfrak{m}_0+[\Lambda(\mathfrak{k}),\mathfrak{m}_0]+[\Lambda(\mathfrak{k}),[\Lambda(\mathfrak{k}),\mathfrak{m}_0]]+\cdots,$$

其中 $\mathfrak{m}_0$ 是由

$$\{[\Lambda(X),\Lambda(Y)]-\Lambda([X,Y]);\ X,Y\in\mathfrak{k}\}$$

张成的 $\mathfrak{g}$ 的子空间.

证明 因为 K 在 P 上是纤维可迁的, 所以由推论 10.7 可知, 限制和乐群 $\Phi^0(u_0)$ 与无穷小和乐群 $\Phi'(u_0)$ 一致. 定义 $\mathfrak{g}$ 的子空间序列 $\mathfrak{m}_k(k=0,1,2,\cdots)$ 如下:

$$\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_0 + [\Lambda(\mathfrak{k}), \mathfrak{m}_0],$$

$$\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_0 + [\Lambda(\mathfrak{k}), \mathfrak{m}_0] + [\Lambda(k), [\Lambda(\mathfrak{k}), \mathfrak{m}_0]],$$

$$\cdots\cdots$$

在 2.10 节中我们曾定义了一个 $\mathfrak{g}$ 的子空间的递增序列 $\mathfrak{m}_k(u_0)(k=0,1,\cdots)$. 因为这些子空间 $\mathfrak{m}_k(u_0)$ 之并是无穷小和乐群 $\Phi'(u_0)$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}'(u_0)$, 所以只需证明 $\mathfrak{m}_k = \mathfrak{m}_k(u_0)(k=0,1,\cdots)$ 就行了. 证毕.

由命题 11.4, 子空间 $\mathfrak{m}_0$ 是由 $\{\Omega_{u_0}(\tilde{X},\tilde{Y}); X,Y\in k\}$ 张成的. 因为 $\Omega_{u_0}(\tilde{X},\tilde{Y}) = \Omega_{u_0}(h\tilde{X}, h\tilde{Y})$, 其中 $h\tilde{X}$ 和 $h\tilde{Y}$ 分别表示 $\tilde{X}$ 和 $\tilde{Y}$ 的水平分量, 所以 $\mathfrak{m}_0$ 和 $\mathfrak{m}_0(u_0)$ 一致.

我们需要下列两个引理.

引理 1 若 Y 是 P 上的水平向量场, 而 $\tilde{X}$ 是由 $\mathfrak{k}$ 的元素 X 在 P 上诱导的向量场, 那么 $[\tilde{X}, Y]$ 是水平的.

引理 1 的证明 由第一章命题 3.2(c)(也可参看第一章命题 3.5) 得

$$\tilde{X}(\omega(Y)) = (L_{\tilde{X}}\omega) + \omega([\tilde{X}, Y]).$$

因为 $\omega(Y)=0$ 和 $L_{\tilde{X}}\omega = 0$, 所以有 $\omega([\tilde{X},Y])=0$. 证毕.

引理 2 令 $V, W, Y_1, \cdots, Y_r$ 是 P 上的任意水平向量场并且令 $\tilde{X}$ 是 P 上由 $\mathfrak{k}$ 的元素 X 诱导的向量场. 那么

$$\tilde{X}_{u_0}(Y_r\cdots Y_1(\Omega(V,W))) \in \mathfrak{m}_r(u_0).$$

引理 2 的证明 因为由引理 1, $[\tilde{X}, Y_r]$ 是水平的而且 $[\tilde{X}, Y_r]_{u_0}(Y_{r-1}\cdots Y_1(\Omega(V,W)))$ 在 $\mathfrak{m}_r(u_0)$ 中, 所以有

$$\tilde{X}_{u_0}(Y_r\cdots Y_1(\Omega(V,W))) \equiv (Y_r)_{u_0}(\tilde{X}Y_{r-1}\cdots Y_1(\Omega(V,W))) \quad \mathrm{mod}\,\mathfrak{m}_r(u_0).$$

重复这个过程就得到

$$\tilde{X}_{u_0}(Y_r\cdots Y_1(\Omega(V,W))) \equiv (Y_r)_{u_0}(Y_{r-1}\cdots Y_1\tilde{X}(\Omega(V,W))) \quad \mathrm{mod}\,\mathfrak{m}_r(u_0).$$

通过跟引理 1 的证明中同样的论证得到

$$\tilde{X}(\Omega(V,W)) = (L_{\tilde{X}}\Omega)(V,W) + \Omega([\tilde{X},V],W) + \Omega(V,[\tilde{X},W]).$$

因为 $L_{\tilde{X}}\Omega = 0$, 故有

$$(Y_r)_{u_0}(Y_{r-1}\cdots Y_1\tilde{X}(\Omega(V,W))) =(Y_r)_{u_0}(Y_{r-1}\cdots Y_1(\Omega([\tilde{X},V]W))) + (Y_r)_{u_0}(Y_{r-1}\cdots Y_1(\Omega(V,[\tilde{X},W]))).$$

因为由引理 1, $[\tilde{X},V]$ 和 $[\tilde{X},W]$ 是水平的, 所以右边的两项属于 $m_r(u_0)$. 这就完成了引理 2 的证明.

令 $X_i = \partial/\partial x^i$, 其中 $x^1,\cdots,x^n$ 是 $x_0 = \pi(u_0)$ 点的一个邻域上的局部坐标系. 令 X_i^* 是 X_i 的水平提升. 令

$$f = X_{j_r}^*\cdots X_{j_1}^*(\Omega(X_i^*,X_j^*))$$

是如同在 2.10 节中定义的那种 (II_r) 型函数. 若 $h\tilde{X}$ 和 $v\tilde{X}$ 分别表示 $\tilde{X}$ 的水平分量和垂直分量, 那么命题 10.4 的引理 1 蕴涵着

$$(h\tilde{X})_{u_0}f = -(v\tilde{X})_{u_0}f + \tilde{X}_{u_0}f = [\omega_{u_0}(\tilde{X}),f(u_0)] + \tilde{X}_{u_0}f.$$

因为由引理 2, $\tilde{X}_{u_0}f \in \mathfrak{m}_r(u_0)$, 又因为 $\omega_{u_0}(\tilde{X}) = \Lambda(X)$, 所以有

$$(h\tilde{X})_{u_0}f \equiv [\Lambda(X),f(u_0)] \quad \mathrm{mod}\,\mathfrak{m}_r(u_0).$$

假设 $\mathfrak{m}_r = \mathfrak{m}_r(u_0)$ 对所有 $r < s$ 已成立, 我们来证明 $\mathfrak{m}_s = \mathfrak{m}_s(u_0)$. 因为 K 在 P 上是纤维可迁的, 所以 u_0 点处的每个水平向量对于某个 $X \in \mathfrak{k}$ 具有 $(h\tilde{X})_{u_0}$ 的形式. 因而 $\mathfrak{m}_s(u_0)$ 是由 $\mathfrak{m}_{s-1}(u_0)$ 和所有 $(h\tilde{X})_{u_0}f$ 的集合张成的, 其中 $X \in \mathfrak{k}$ 且 f 是 (II_{s-1}) 型的函数. 另一方面, $\mathfrak{m}_s$ 是由 $\mathfrak{m}_{s-1} = \mathfrak{m}_{s-1}(u_0)$ 和 $[\Lambda(\mathfrak{k}),\mathfrak{m}_{s-1}] = [\Lambda(\mathfrak{k}),\mathfrak{m}_{s-1}(u_0)]$ 张成的. 换句话说, $\mathfrak{m}_s$ 是由 $\mathfrak{m}_{s-1} = \mathfrak{m}_{s-1}(u_0)$ 和所有 $[\Lambda(X),f(u_0)]$ 的集合张成的, 其中 $X \in \mathfrak{k}$ 且 f 是 (II_{s-1}) 型的函数. $\mathfrak{m}_s = \mathfrak{m}_s(u_0)$ 的论断从同余式 $(h\tilde{X})_{u_0}f \equiv [\Lambda(X),f(u_0)]\ \mathrm{mod}\,\mathfrak{m}_{s-1}(u_0)$ 得出. 证毕.

评注 定理 11.1 的 (4) 是定理 11.8 的推论 (参看在定理 11.7 的证明之后所作的评注).

第三章　线性联络和仿射联络

3.1　向量丛上的联络

令 $\mathbf{F}$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 或者复数域 $\mathbf{C}$; $\mathbf{F}^m$ 是所有 $\mathbf{F}$ 元素的 m 元组构成的向量空间; $GL(m;\mathbf{F})$ 是矩阵元取自 $\mathbf{F}$ 的所有 $m\times m$ 非奇异矩阵组成的群. 群 $GL(m;\mathbf{F})$ 自然地左作用于 $\mathbf{F}^m$ 上. 若 $a=(a^i_j)\in GL(m;\mathbf{F}),\xi=(\xi^1,\cdots,\xi^m)\in\mathbf{F}^m$, 那么

$$a\xi=\Big(\sum_j a^1_j\xi^j,\cdots,\sum_j a^m_j\xi^j\Big)\in\mathbf{F}^m.$$

令 $P(M,G)$ 是一个主纤维丛且 ρ 是 G 到 $GL(m;\mathbf{F})$ 中的一种表示. 令 $E(M,\mathbf{F}^m,G,P)$ 是以 $\mathbf{F}^m$ 为标准纤维的伴随从且 G 通过 ρ 作用于其上. 依据 $\mathbf{F}=\mathbf{R}$ 或者 $\mathbf{F}=\mathbf{C}$ 而将 E 称为 M 上的实向量丛或复向量丛. E 的每一纤维 $\pi_E^{-1}(x)$ $(x\in M)$ 都具有向量空间的结构并且使得每一个满足 $\pi(u)=x$ 的 $u\in P$, 看作从 $\mathbf{F}^m$ 到 $\pi_E^{-1}(x)$ 的映射时, 是从 $\mathbf{F}^m$ 到 $\pi_E^{-1}(x)$ 上的一个线性同构. 令 S 是截面 $\varphi:M\to E$ 的集合, 它构成 $\mathbf{F}$ 上的向量空间 (当 $m\geqslant 1$ 时是无穷维的), 其中的加法和数乘运算定义为

$$(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x),\quad \varphi,\psi\in S,x\in M,$$
$$(\lambda\varphi)(x)=\lambda(\varphi(x)),\quad \varphi\in S,\lambda\in\mathbf{F},x\in M.$$

我们也可以把 S 看作 $\mathbf{F}$ 值函数组成的代数上的模. 若 λ 是 M 上的一个 $\mathbf{F}$ 值函数, 那么

$$(\lambda\varphi)(x)=\lambda(x)\cdot\varphi(x),\quad \varphi\in S,x\in M.$$

令 Γ 是 P 上的一个联络. 回顾在第二章 2.5 节中 Γ 是如何定义 E 的纤维平移的. 若 $\tau=x_t(a\leqslant t\leqslant b)$ 是 M 上的一条曲线且 $\tau^*=u_t$ 是 τ 到 P 中的水平提升, 那么由定义, 对于每个固定的 $\xi\in\mathbf{F}^m$, 曲线 $\tau'=u_t\xi$ 是 τ 到 E 中的水平提升.

令 φ 是在 $\tau=x_t$ 上定义的 E 的截面使得 $\pi_E\circ\varphi(x_t)=x_t$ 对所有 t 成立. 令 $\dot{x}_t$ 是 τ 在 x_t 点的切向量, 那么对于每个固定的 t,φ 沿 $\dot{x}_t$ 方向的 (或称关于 $\dot{x}_t$ 的) 协变导数 $\nabla_{\dot{x}_t}\varphi$ 定义为

$$\nabla_{\dot{x}_t}\varphi=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\tau_t^{t+h}(\varphi(x_{t+h}))-\varphi(x_t)].$$

其中 $\tau_t^{t+h}:\pi_E^{-1}(x_{t+h})\to\pi_E^{-1}(x_t)$ 表示纤维 $\pi_E^{-1}(x_{t+h})$ 沿 τ 从 x_{t+h} 到 x_t 的平移. 因而对每个 $t,\nabla_{\dot{x}_t}\varphi\in\pi_E^{-1}(x_t)$ 并且定义 E 的沿 τ 的一个截面. 截面 φ 是平行的.

即 E 中的曲线 $\varphi(x_t)$ 是水平的, 当且仅当 $\nabla_{\dot{x}_t}\varphi=0$ 对所有 t 成立. 下列公式是明显的. 若 φ 和 ψ 都是 E 的定义在 $\tau=x_t$ 上的截面, 那么

$$\nabla_{\dot{x}_t}(\varphi+\psi)=\nabla_{\dot{x}_t}\varphi+\nabla_{\dot{x}_t}\psi.$$

若 λ 是在 τ 上定义的 $\mathbf{F}$ 值函数, 那么

$$\nabla_{\dot{x}_t}(\lambda\varphi)=\lambda(x_t)\cdot\nabla_{\dot{x}_t}\varphi+(\dot{x}_t\lambda)\cdot\varphi(x_t).$$

上面的公式可从下式立即得出:

$$\tau_t^{t+h}(\lambda(x_{t+h})\cdot\varphi(x_{t+h}))=\lambda(x_{t+h})\cdot\tau_t^{t+h}(\varphi(x_{t+h})).$$

令 $X\in T_x(M)$ 且 φ 是在 x 的邻域上定义的 E 的一个截面. 那么 φ 沿 X 方向的协变导数 $\nabla_x\varphi$ 定义如下. 令 $\tau=x_t(-\varepsilon\leqslant t\leqslant\varepsilon)$ 是使得 $X=\dot{x}_0$ 的一条曲线, 那么置

$$\nabla_X\varphi=\nabla_{\dot{x}_0}\varphi.$$

容易看出 $\nabla_X\varphi$ 不依赖于 τ 的选取. 在 M 的开子集 U 上定义的 E 的截面 φ 是平行的当且仅当 $\nabla_X\varphi=0$ 对所有 $X\in T_x(U)$ $(x\in U)$ 成立.

命题 1.1 令 $X,Y\in T_x(M)$ 并且令 φ 和 ψ 是在 x 的邻域上定义的 E 的截面. 那么

(1) $\nabla_{X+Y}\varphi=\nabla_X\varphi+\nabla_Y\varphi$;

(2) $\nabla_X(\varphi+\psi)=\nabla_X\varphi+\nabla_X\psi$;

(3) $\nabla_{\lambda X}\varphi=\lambda\cdot\nabla_X\varphi$, 其中 $\lambda\in\mathbf{F}$;

(4) $\nabla_X(\lambda\varphi)=\lambda(x)\cdot\nabla_X\varphi+(X\lambda)\cdot\varphi(x)$, 其中 λ 是在 x 的邻域上定义的 $\mathbf{F}$ 值函数.

证明 我们将证明 (2) 和 (4). (3) 是明显的. (1) 可从下述协变微分的另一种定义立即得出.

假设 E 的截面 φ 是在 M 的一个开集 U 上定义的. 就像在第二章例 5.2 中那样, 对 φ 伴之以 $\pi^{-1}(U)$ 上的一个 $\mathbf{F}^m$ 值函数 f 如下:

$$f(v)=v^{-1}(\varphi(\pi(v))),\quad v\in\pi^{-1}(U).$$

给定 $X\in T_x(M)$. 令 $X^*\in T_u(P)$ 是 X 的水平提升. 因为 f 是一个 $\mathbf{F}^m$ 值函数, 所以 X^*f 是 $\mathbf{F}^m$ 中的一个元素且 $u(X^*f)$ 是纤维 $\pi_E^{-1}(x)$ 中的元素. 另外我们还有下列引理. 证毕

引理 $\nabla_X\varphi=u(X^*f)$.

引理的证明 令 $\tau = x_t(-\varepsilon \leqslant t \leqslant \varepsilon)$ 是满足 $X = \dot{x}_0$ 的一条曲线. 令 $\tau^* = u_t$ 是 τ 的一个水平提升且使得 $u_0 = u$ 因而 $X^* = \dot{u}_0$. 于是我们有

$$X^*f = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(u_h) - f(u)] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[u_h^{-1}(\varphi(x_h)) - u^{-1}(\varphi(x))]$$

和

$$u(X^*f) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[u\circ u_h^{-1}(\varphi(x_h)) - \varphi(x)].$$

为了证明引理只需证明

$$\tau_0^h(\varphi(x_h)) = u\circ u_h^{-1}(\varphi(x_h)).$$

置 $\xi = u_h^{-1}(\varphi(x_h))$. 那么 $u_t\xi$ 是 E 中的水平曲线. 因为 $u_h\xi = \varphi(x_h)$, 所以 $\varphi(x_h)$ 是由 $u_0\xi = u\circ u_h^{-1}(\varphi(x_h))$ 沿 τ 从 x_0 到 x_h 的平移而得到的 E 的元素. 这蕴涵着 $\tau_0^h(\varphi(x_h)) = u\circ u_h^{-1}(\varphi(x_h))$, 从而完成了引理的证明.

于是, 命题 1.1 的 (1) 可从引理和下列事实得出. 如果 $X, Y \in T_x(M)$ 而且 $X^*, Y^* \in T_u(P)$ 分别是 X 和 Y 的水平提升, 那么 $X^* + Y^*$ 是 $X + Y$ 的水平提升.

证毕.

若 φ 是在 M 上定义的 E 的一个截面且 X 是 M 上的向量场, 那么 φ 沿 X 方向的 (或称关于 X 的) 协变导数 $\nabla_X\varphi$ 定义为

$$(\nabla_X\varphi)(x) = \nabla_{X_x}\varphi.$$

于是作为命题 1.1 的直接推论就有

命题 1.2 令 X 和 Y 是 M 上的向量场, φ 和 ψ 是 E 在 M 上的截面且 λ 是 M 上的 $\mathbf{F}$ 值函数, 那么

(1) $\nabla_{X+Y}\varphi = \nabla_X\varphi + \nabla_Y\varphi$;

(2) $\nabla_X(\varphi + \psi) = \nabla_X\varphi + \nabla_X\psi$;

(3) $\nabla_{\lambda X}\varphi = \lambda\cdot\nabla_X\varphi$;

(4) $\nabla_X(\lambda\varphi) = \lambda\cdot\nabla_X\varphi + (X\lambda)\varphi$.

令 X 是 M 上的一个向量场且 X^* 是 X 到 P 的水平提升. 那么协变微分 ∇_X 按下列意义对应于 Lie 微分 L_{X^*}. 在第二章例 5.2 中我们已看到在截面 $\varphi: M\to E$ 的集合与 P 上使得 $f(ua) = a^{-1}(f(u))$ $(a\in G)(a^{-1}$ 意指 $\rho(a^{-1})\in GL(m;\mathbf{F}))$ 的 $\mathbf{F}^m$ 值函数 f 的集合之间存在一个一一对应. 这个对应由 $f(u) = u^{-1}(\varphi(\pi(u)))(u\in P)$ 给出. 于是又有下列命题.

命题 1.3 若 $\varphi: M\to E$ 是一个截面且 $f: P\to\mathbf{F}^m$ 是相应的函数, 那么 X^*f 是对应于截面 $\nabla_X\varphi$ 的函数.

证明 这是命题 1.1 中引理的直接推论.

向量丛 E 上的纤维内积 g 是对每个 $x \in M$ 指定纤维 $\pi_E^{-1}(x)$ 上的一个内积 g_x 的一种指派, 而且它按下意义对 x 是可微的: 若 φ 和 ψ 是 E 的可微截面, 那么 $g_x(\varphi(x), \psi(x))$ 可微地依赖于 x. 当 E 是复向量丛时, 将内积理解为 Hermite 内积:

$$g_x(\Xi_1, \Xi_2) = \overline{g_x(\Xi_2, \Xi_1)}, \quad \Xi_1, \Xi_2 \in \pi_E^{-1}(x).$$

证毕

命题 1.4 若 M 是仿紧的, 那么 M 上的每个向量丛 E 都允许有纤维度量.

证明 这可以从第一章的定理 5.7 得出, 正如仿紧流形上存在 Riemann 度量一样. 在这里我们利用单位分解给出另一种证明. 令 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 M 的一个局部有限开覆盖并使得对每个 $i, \pi_E^{-1}(U_i)$ 同构于 $U_i \times \mathbf{F}^m$. 令 $\{s_i\}$ 是从属于 $\{U_i\}$ 的单位分解 (参看附录 3). 令 h^i 是 $E|_{U_i} = \pi_E^{-1}(U_i)$ 上的纤维度量, 置 $g = \sum\limits_i s_i h^i$, 即对于 $\Xi_1, \Xi_2 \in \pi_E^{-1}(x), x \in M$,

$$g(\Xi_1, \Xi_2) = \sum_i s_i(x) h^i(\Xi_1, \Xi_2).$$

因为 $\{U_i\}$ 是局部有限的并且 s_i 在 U_i 之外为零, 所以 g 是完全确定的纤维度量.

证毕.

给定向量丛 $E(M, \mathbf{F}^m, G, P)$ 上的一个纤维度量 g, 我们来构造 $P(M, G)$ 的一个约化子丛 $Q(M, H)$ 如下. 在 E 的标准纤维 $\mathbf{F}^m$ 上考虑如下定义的标准内积 (,):

$$(\xi, \eta) = \sum_i \xi^i \eta^i, \quad \xi = (\xi^1, \cdots, \xi^m), \quad \eta = (\eta^1, \cdots, \eta^m) \in \mathbf{R}^m,$$
$$(\xi, \eta) = \sum_i \xi^i \bar{\eta}^i, \quad \xi = (\xi^1, \cdots, \xi^m), \quad \eta = (\eta^1, \cdots, \eta^m) \in \mathbf{C}^m.$$

令 Q 是使得对于 $\xi, \eta \in \mathbf{F}^m, g(u(\xi), u(\eta)) = (\xi, \eta)$ 的 $u \in P$ 的集合, 则 Q 是 P 的闭子流形. 容易验证 Q 是 P 的约化子丛. 其结构群 H 由下式给出:

$$H = \{a \in G; \rho(a) \in O(m)\}, \quad \text{若} \mathbf{F} = \mathbf{R},$$
$$H = \{a \in G; \rho(a) \in U(m)\}, \quad \text{若} \mathbf{F} = \mathbf{C},$$

其中 ρ 是 G 在 $GL(m; \mathbf{F})$ 中的表示.

给定 E 上的一个纤维度量 g, 若 E 的纤维平移保持纤维度量 g, 则将 P 上的联络称为度量联络. 更确切地说, 对 M 上的每条曲线 $\tau = x_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$, 沿 τ 的平移 $\pi_E^{-1}(x_0) \to \pi_E^{-1}(x_1)$ 都是等距变换.

命题 1.5 令 g 是向量丛 $E(M, \mathbf{F}^m, G, P)$ 上的纤维度量且 $Q(M, H)$ 是由 g 定义的 $P(M, G)$ 的约化子丛. P 上的联络 Γ 可约化成 Q 上的联络 Γ' 当且仅当 Γ 是一个度量联络.

证明 令 $\tau = x_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是 M 上的一条曲线. 令 $\xi, \eta \in \mathbf{F}^m$ 且 $u_0 \in Q$ 满足 $\pi(u_0) = x_0$. 令 $\tau^* = u_t$ 是 τ 在 P 中从 u_0 出发的水平提升因而 $\tau' = u_t(\xi)$ 和 $\tau'' = u_t(\eta)$ 都是 τ 在 E 中的水平提升. 若 Γ 可约化为 Q 上的联络 Γ', 那么对所有 $t, u_t \in Q$. 从而

$$g(u_0(\xi), u_0(\eta)) = (\xi, \eta) = g(u_t(\xi), u_t(\eta)),$$

这证明 Γ 是一个度量联络. 反之, 若 Γ 是度量联络, 那么

$$g(u_t(\xi), u_t(\eta)) = g(u_0(\xi), u_0(\eta)) = (\xi, \eta).$$

因此 $u_t \in Q$. 由第二章命题 7.2, 这意味着 Γ 可约化为 Q 上的联络. 证毕.

命题 1.5 连同第二章的定理 2.1 一起就蕴涵着若在仿紧流形 K 上的向量从 E 中给定一个纤维度量 g, 那么在 P 上就有一个度量联络.

令 $E(M, \mathbf{F}^m, G, P)$ 是一个向量丛并且使得 $G = GL(m; \mathbf{F})$. 令 $E_i^j \in \mathfrak{gl}(m; \mathbf{F})$ ($GL(m; \mathbf{F})$ 的 Lie 代数) 是使得第 i 行和第 j 列处的元素为 1, 而其他元素均为 0 的 $m \times m$ 矩阵. 那么 $\{E_i^j; i, j = 1, \cdots, m\}$ 构成 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(m; \mathbf{F})$ 的一个基. 令 ω 和 Ω 是 P 上的联络 Γ 的联络形式和曲率形式. 置

$$\omega = \sum_{i,j} \omega_j^i E_i^j, \quad \Omega = \sum_{i,j} \Omega_j^i E_i^j.$$

容易验证联络 Γ 的结构方程 (参看第二章 2.5 节) 可以表示成

$$d\omega_j^i = -\sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \Omega_j^i, \quad i, j = 1, \cdots, m.$$

令 g 是 E 上的一个纤维度量并且 Q 是由 g 定义的 P 的约化子丛. 若 Γ 是度量联络, 那么由第二章的命题 6.1 和 (本章) 命题 1.5, ω 在 Q 上的限制定义 Q 上的一个联络. 特别是, ω 和 Ω(限制在 Q 上) 根据 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ 或者 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ 而分别取值于 Lie 代数 $\mathfrak{o}(m)$ 或 $\mathfrak{u}(m)$. 换句话说, (ω_j^i) 和 (Ω_j^i)(限制在 Q 上) 根据 $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ 或者 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ 分别是反对称矩阵或反 Hermite 矩阵.

3.2 线性联络

贯穿本节始终用 P 表示线性标架丛 $L(M)$ 并且用 G 表示一般线性群 $GL(n; \mathbf{R})$ ($n = \dim M$).

P 的标准形式 θ 是由

$$\theta(X) = u^{-1}(\pi(X)), \quad X \in T_u(P)$$

定义的 P 上的 $\mathbf{R}^n$ 值 1 形式, 其中 u 被看作从 $\mathbf{R}^n$ 到 $T_{\pi(u)}(M)$ 的线性映射 (参看第一章例 5.2).

命题 2.1　P 的标准形式 θ 是 $(GL(n;\mathbf{R}),\mathbf{R}^n)$ 型张量 1 形式. 在第二章例 5.2 的意义上, 它在每一点 $x\in M$ 都对应于切空间 $T_x(M)$ 的恒等变换.

证明　若 X 是 $u\in P$ 点处的垂直向量, 则 $\pi(X)=0$ 因而 $\theta(X)=0$. 如果 X 是 $u\in P$ 点处的任何向量并且 a 是 $G=GL(n;\mathbf{R})$ 的任何元素, 那么 R_aX 是 $ua\in P$ 点处的向量. 因此

$$\begin{aligned}(R_a^*\theta)(X)=\theta(R_aX)&=(ua)^{-1}(\pi(R_aX))\\&=a^{-1}u^{-1}(\pi(X))=a^{-1}(\theta(X)),\end{aligned}$$

从而证明了第一个论断. 第二个论断是明显的.　证毕.

M 上的线性标架丛 P 上的联络称为 M 的线性联络. 给定 M 的一个线性联络 Γ, 对每个 $\xi\in\mathbf{R}^n$ 伴之以 P 上的水平向量场 $B(\xi)$ 如下. 对于每个 $u\in P$, $(B(\xi))_u$ 是 u 点处唯一使得 $\pi((B(\xi))_u)=u(\xi)$ 的水平向量. $B(\xi)$ 称为对应于 ξ 的标准水平向量场. 与基本向量场不同的是, 标准水平向量场依赖于联络的选取.

命题 2.2　标准水平向量场具有下列性质:

(1) 若 θ 是 P 的标准形式, 则 $\theta(B(\xi))=\xi$, $\quad\xi\in\mathbf{R}^n$;

(2) $R_a(B(\xi))=B(a^{-1}\xi)$, $\quad a\in G$, $\quad\xi\in\mathbf{R}^n$;

(3) 若 $\xi\neq 0$, 则 $B(\xi)$ 恒不为零.

证明　(1) 是明显的. (2) 从下列事实得出: 若 X 是 u 点的水平向量, 那么 $R_a(X)$ 是 ua 点处的水平向量并且 $\pi(R_a(X))=\pi(X)$. 为证明 (3), 假设在某一点 $u\in P$ 处. $(B(\xi))_u=0$, 那么 $u(\xi)=\pi((B(\xi))_u)=0$. 因为 $u:\mathbf{R}^n\to T_{\pi(u)}(M)$ 是一个线性同构, 所以 $\xi=0$.　证毕.

评注　对于每个 $\xi\in\mathbf{R}^n$, 条件 $\theta(B(\xi))=\xi$ 和 $\omega(B(\xi))=0$(其中 ω 是联络形式) 完全决定 $B(\xi)$.

命题 2.3　若 A^* 是对应于 $A\in\mathfrak{g}$ 的基本向量场且 $B(\xi)$ 是对应于 $\xi\in\mathbf{R}^n$ 的标准水平向量场, 那么

$$[A^*,B(\xi)]=B(A\xi),$$

其中 $A\xi$ 表示 ξ 在作用于 $\mathbf{R}^n$ 上的 $A\in\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})$(所有 $n\times n$ 矩阵构成的 Lie 代数) 下的象.

证明　令 a_t 是由 A 生成的 G 的单参数子群: $a_t=\exp tA$. 由第一章命题 1.9 和 (本章) 命题 2.2 的 (2),

$$[A^*,B(\xi)]=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}[B(\xi)-R_{a_t}(B(\xi))]=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}[B(\xi)-B(a_t^{-1}\xi)].$$

因为 $\xi \to (B(\xi))_u$ 是从 $\mathbf{R}^n$ 到水平子空间 Q_u 的线性同构 (参看命题 2.2 的 (3)), 所以有

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[B(\xi)-B(a_t^{-1}\xi)] = B\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\xi - a_t^{-1}\xi)\right) = B(A\xi).$$

证毕.

我们将线性联络 Γ 的挠率形式 Θ 定义为

$$\Theta = D\theta \quad (\theta\text{的协变外微分}).$$

由第二章的命题 5.1 和 (本章) 命题 2.1, Θ 是 P 上的一个 $(GL(n;\mathbf{R}),\mathbf{R}^n)$ 型张量 2 形式.

定理 2.4(结构方程) 令 ω,Θ 和 Ω 是 M 上线性联络 Γ 的联络形式, 挠率形式和曲率形式, 则有

第一结构方程:

$$d\theta(X,Y) = -\frac{1}{2}(\omega(X)\cdot\theta(Y)-\omega(Y)\cdot\theta(X))+\Theta(X,Y),$$

第二结构方程:

$$d\omega(X,Y) = -\frac{1}{2}[\omega(X),\omega(Y)]+\Omega(X,Y),$$

其中 $X,Y\in T_u(P), u\in P$.

证明 第二结构方程已在第二章的定理 5.2 中证明过了 (也可参看 3.1 节). 第一结构方程的证明类似于第二章定理 5.2 的证明. 有三种必须验证的情况, 但是唯一非平凡的情况是 X 为垂直的而 Y 为水平的情况. 选取 $A\in\mathfrak{g}$ 和 $\xi\in\mathbf{R}^n$ 使得 $X=A_u^*$ 且 $Y=B(\xi)_u$, 那么 $\Theta(X,Y)=0, \omega(Y)\cdot\theta(X)=0$ 且 $\omega(X)\cdot\theta(Y)=\omega(A^*)\cdot\theta(B(\xi))=A\xi$, 因为 $\omega(A^*)=A$ 且 $\theta(B(\xi))=\xi$. 另一方面, 由命题 2.3, $2d\theta(X,Y) = A^*(\theta(B(\xi)))-B(\xi)(\theta(A^*))-\theta([A^*,B(\xi)]) = -\theta([A^*,B(\xi)]) = -\theta(B(A\xi)) = -A\xi$. 这证明第一结构方程成立. 证毕.

利用 $\mathbf{R}^n$ 的自然基 $e_1,\cdots,e_n$, 写成

$$\theta=\sum_i\theta^i e_i,\quad \Theta=\sum_i\Theta^i e_i.$$

像在 3.1 节中那样, 利用 $\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})$ 的基 E_i^j 写成

$$\omega=\sum_{v,j}\omega_j^i E_i^j,\quad \Omega=\sum_{i,j}\Omega_j^i E_i^j.$$

那么可将结构方程写为

(1) $d\theta^i = -\sum_j \omega^i_j \wedge \theta^j + \Theta^i, \quad i = 1, \cdots, n,$

(2) $d\omega^i_j = -\sum_k \omega^i_k \wedge \omega^k_j + \Omega^i_j, \quad i, j = 1, \cdots, n.$

将 θ 看作向量值形式而把 ω 看成矩阵值形式, 那么也可以将结构方程写成下列简化形式:

(1′) $d\theta = -\omega \wedge \theta + \Theta,$

(2′) $d\omega = -\omega \wedge \omega + \Omega.$

下一节, 我们将从仿射联络的观点对挠率形式和第一结构方程给出一种解释.

定理 2.5 (Bianchi 恒等式)　对于线性联络, 我们有

第一恒等式: $D\Theta = \Omega \wedge \theta$, 即

$$3D\Theta(X, Y, Z) = \Omega(X, Y)\theta(Z) + \Omega(Y, Z)\theta(X) + \Omega(Z, X)\theta(Y),$$
$$\text{其中} X, Y, Z \in T_u(P).$$

第二恒等式: $D\Omega = 0$.

证明　第二恒等式已在第二章的定理 5.4 中证明. 第一恒等式的证明类似于定理 5.4 的证明. 若将外微分算子 d 应用于第一结构方程 $d\theta = -\omega \wedge \theta + \Theta$, 即可得到

$$0 = -d\omega \wedge \theta + \omega \wedge d\theta + d\Theta.$$

用 hX 表示 X 的水平分量, 那么 $\omega(hX) = 0, \theta(hX) = \theta(X), d\omega(hX, hY) = \Omega(X, Y)$. 从而

$$\begin{aligned} D\Theta(X, Y, Z) &= d\Theta(hX, hY, hZ) = (d\omega \wedge \theta)(hX, hY, hZ) \\ &= (\Omega \wedge \theta)(X, Y, Z). \end{aligned}$$

证毕.

令 $B_1, \cdots, B_n$ 是与 $\mathbf{R}^n$ 的自然基 $e_1, \cdots, e_n$ 相对应的标准水平向量场而 $\{E^{j*}_i\}$ 是与 $\mathfrak{gl}(n; \mathbf{R})$ 的基 $\{E^j_i\}$ 对应的基本向量场. 容易验证 $\{B_i, E^{j*}_i\}$ 和 $\{\theta^i, \omega^i_j\}$ 按下列意义是相互对偶的:

$$\theta^k(B_i) = \delta^k_i, \quad \theta^k(E^{j*}_i) = 0,$$
$$\omega^k_l(B_i) = 0, \quad \omega^k_l(E^{j*}_i) = \delta^k_i \delta^j_l.$$

定理 2.6　$n^2 + n$ 个向量场 $\{B_k, E^{j*}_i; i, j, k = 1, \cdots, n\}$ 定义 P 上的绝对平行性, 即对每个 $u \in P$, $n^2 + n$ 个向量 $\{(B_k)_u, (E^{j*}_i)_u\}$ 构成 $T_u(P)$ 的一个基.

证明　因为 P 的维数是 $n^2 + n$, 所以只需证明上面的 $n^2 + n$ 个向量是线性无关的. 因为 $A \to A^*_u$ 是从 $\mathfrak{g}$ 到 $T_u(P)$ 的垂直子空间上的线性同构 (参看第一章 1.5 节), 所以 $\{E^{j*}_i\}$ 在 P 的每一点处都是线性无关的. 由命题 2.2 的 (3), $\{B_k\}$ 在 P

的每一点也是线性无关的, 又因为 $\{B_k\}$ 是水平的而 $\{E_i^{j*}\}$ 是垂直的, 因而在 P 的每一点处 $\{B_k, E_i^{j*}\}$ 都是线性无关的. 证毕.

令 $T_s^r(M)$ 是 M 上的 (r,s) 型张量丛 (参看第一章例 5.4). 这是一个以 $\boldsymbol{T}_s^r$($\mathbf{R}^n$ 上的 (r,s) 型张量空间) 为标准纤维的伴随于线性标架丛 P 的向量丛. 一个 (r,s) 型张量场 K 是张量丛 $T_s^r(M)$ 的一个截面, 在 3.1 节中我们曾一般地定义过向量丛中截面的协变导数. 如同在 3.1 节中那样, 我们可以在下列三种情况下定义 K 的协变导数:

(1) 当 K 沿 M 中的曲线 $\tau = x_t$ 有定义时, 定义 $\nabla_{\dot{x}_t} K$;

(2) 当 $X \in T_x(M)$ 且 K 在 x 的邻域中有定义时, 定义 $\nabla_X K$;

(3) 当 X 是 M 上的向量场且 K 是 M 上的张量场时, 定义 $\nabla_X K$.

为了简单起见. 我们仅按情况 (3) 来叙述下列命题, 但经过显而易见的改变, 它对情况 (1) 和 (2) 也是有效的.

命题 2.7 令 $\mathfrak{T}(M)$ 是 M 上的张量场构成的代数, 令 X 和 Y 是 M 上的向量场, 那么协变微分具有下列性质:

(1) $\nabla_X : \mathfrak{T}(M) \to \mathfrak{T}(M)$ 是一个保型导算子;

(2) ∇_X 与一切缩并运算交换;

(3) 对 M 上的每个函数 $f, \nabla_X f = Xf$;

(4) $\nabla_{X+Y} = \nabla_X + \nabla_Y$;

(5) 对 M 上的每个函数 f 和 $K \in \mathfrak{T}(M), \nabla_{fX} K = f \cdot \nabla_X K$.

证明 令 $\tau = x_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是 M 中的一条曲线. 令 $\boldsymbol{T}(x_t)$ 是 $T_{x_t}(M)$ 上的张量代数, $\boldsymbol{T}(x_t) = \sum \boldsymbol{T}_s^r(x_t)$(参看第一章 1.3 节). 沿 τ 的平移给出从代数 $\boldsymbol{T}(x_0)$ 到代数 $\boldsymbol{T}(x_1)$ 的保型同构并且可与每个缩并运算交换. 从 3.1 节给出的协变微分的定义可以得出 (1) 和 (2), 论证类似于第一章命题 3.2 的证明. (3)、(4) 和 (5) 已在命题 1.2 中证明. 证毕.

由第一章命题 3.3 的引理, $\mathfrak{T}(M)$ 上的运算 ∇_X 完全是由它在函数的代数 $\mathfrak{F}(M)$ 和向量场的模 $\mathfrak{X}(M)$ 上的运算所决定的. 因为对每个 $f \in \mathfrak{F}(M), \nabla_X f = Xf$, 所以 ∇_X 在 $\mathfrak{T}(M)$ 上的运算是由它在 $\mathfrak{X}(M)$ 上的运算决定的. 作为命题 1.2 的直接推论则有

命题 2.8 若 X, Y, Z 是 M 上的向量场, 那么

(1) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

(2) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$;

(3) 对于每个 $f \in \mathfrak{F}(M), \nabla_{fX} Y = f \cdot \nabla_X Y$;

(4) 对于每个 $f \in \mathfrak{F}(M), \nabla_X(fY) = f \cdot \nabla_X Y + (Xf)Y$.

后面在 3.7 节中, 我们将证满足以上四个条件的任何映射 $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, 记为 $(X,Y) \to \nabla_X Y$, 实际上都是关于某个线性联络的协变导数.

下列命题的证明应归功于 Kostant[1], 并且类似于第一章命题 3.3 的证明因而将它留给读者.

命题 2.9 令 M 是一个带线性联络的流形. 从张量场的代数 $\mathfrak{T}(M)$ 到 $x \in M$ 点处的张量代数 $\boldsymbol{T}(x)$ 的每一个保型且与缩并运算交换的导算子能唯一分解成

$$D = \nabla_X + S,$$

其中 $X \in T_x(M)$ 且 S 是 $T_x(M)$ 的一个线性自同态.

注意到与关于向量场的 Lie 微分 Lx 不同的是, 当 X 是在 M 的一点处的向量时协变微分 ∇_X 有意义.

给定一个 (r,s) 型张量场 K, 那么 K 的协变微分 ∇K 是如下定义的一个 $(r,s+1)$ 型张量场. 像在第一章命题 2.11 中那样, 把在一点 $x \in M$ 的 (r,s) 型张量看作从 $T_x(M) \times \cdots \times T_x(M)$($s$ 次乘积) 到 $\boldsymbol{T}_0^r(x)$(x 点的 r 阶逆变张量空间) 的多重线性映射. 置

$$(\nabla K)(X_1, \cdots, X_s; X) = (\nabla_X K)(X_1, \cdots, X_s), \quad X, X_i \in T_x(M).$$

命题 2.10 若 K 是 (r,s) 型张量场, 那么

$$\begin{aligned}(\nabla K)(X_1, \cdots, X_s; X) &= \nabla_X (K(X_1, \cdots, X_s)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{s} K(X_1, \cdots, \nabla_X X_i, \cdots, X_s),\end{aligned}$$

其中 $X, X_i \in \mathfrak{X}(M)$.

证明 这可从 ∇_X 是与每个缩并运算交换的导算子这个事实得出. 证明与第一章命题 3.5 的证明类似因而将它留给读者. 证毕.

M 上的张量场 K, 当把它看作张量丛的截面时是平行的当且仅当对所有 $X \in T_x(M)$ 和 $x \in M, \nabla_X K = 0$(参看 3.1 节). 从而有

命题 2.11 M 上的张量场 K 是平行的当且仅当 $\nabla K = 0$.

一个 (r,s) 型张量场 K 的二阶协变微分 $\nabla^2 K$ 定义为 $\nabla(\nabla K)$, 它是一个 $(r,s+2)$ 型的张量场. 置

$$(\nabla^2 K)(;X;Y) = (\nabla_Y(\nabla K))(;X), \quad X, Y \in T_x(M),$$

即如果把 K 看作从 $T_x(M) \times \cdots \times T_x(M)$($s$ 次乘积) 到 $\boldsymbol{T}_0^r(x)$ 的多重线性映射, 那么

$$(\nabla^2 K)(X_1, \cdots, X_s; X; Y) = (\nabla_Y(\nabla K))(X_1, \cdots, X_s; X).$$

类似于命题 2.10, 又有

命题 2.12 对任何张量场 K 与任何向量场 X 和 Y 都有

$$(\nabla^2 K)(;X;Y) = \nabla_Y(\nabla_X K) - \nabla_{\nabla_Y X} K.$$

一般地, m 阶协变微分 $\nabla^m K$ 可归纳地定义为 $\nabla(\nabla^{m-1}K)$. 我们用记号 $(\nabla^m K)(;X_1;\cdots;X_{m-1};X_m)$ 代替 $(\nabla_{X_m}(\nabla^{m-1}K))(;X_1;\cdots;X_{m-1})$.

3.3 仿射联络

流形 M 上的一个线性联络, 对于 M 的每条曲线 $\tau = x_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 定义从切空间 $T_{x_0}(M)$ 到切空间 $T_{x_1}(M)$ 的平行移动; 这些切空间被视为向量空间而且平移是它们之间的线性同构. 现在我们把每个切空间 $T_x(M)$ 看作仿射空间并且称为 x 点的切仿射空间. 从纤维丛的观点看, 这意味着将线性标架丛扩展到仿射标架丛, 关于这一点我们马上将予以解释.

像以前一样, 令 $\mathbf{R}^n$ 是由实数 n 元组构成的向量空间. 当把 $\mathbf{R}^n$ 看作仿射空间时则将它记为 A^n. 类似地, 将 M 在 x 点的切空间看成仿射空间, 记为 $A_x(M)$ 并称之为切仿射空间. A^n 的仿射变换群 $A(n;\mathbf{R})$ 用形如

$$\widetilde{a} = \begin{pmatrix} a & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的所有矩阵组成的群来表示, 其中 $a = (a^i_j) \in GL(n;\mathbf{R})$ 且 $\xi = (\xi^i)(\xi \in \mathbf{R}^n)$ 为列向量. 元素 $\widetilde{a}$ 把 A^n 的一点 η 映射成 $a\eta + \xi$. 我们有如下序列:

$$0 \to \mathbf{R}^n \xrightarrow{\alpha} A(n;\mathbf{R}) \xrightarrow{\beta} GL(n;\mathbf{R}) \to 1,$$

其中 α 是从向量群 $\mathbf{R}^n$ 到 $A(n;\mathbf{R})$ 的同构, 它把 $\xi \in R^n$ 映射成 $\begin{pmatrix} I_n & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A(n;\mathbf{R})$($I_n$ 是 $GL(n;\mathbf{R})$ 的单位元) 而 β 是从 $A(n;\mathbf{R})$ 到 $GL(n;\mathbf{R})$ 的同态, 它把 $\begin{pmatrix} a & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A(n;\mathbf{R})$ 映射成 $a \in GL(n;\mathbf{R})$. 这个序列按下述意义是正合的: 每个同态的核等于前一个同态的象. 它在下述意义上还是一个分裂的正合序列: 有一个同态 $\gamma : GL(n;\mathbf{R}) \to A(n;\mathbf{R})$ 使得 $\beta \circ \gamma$ 是 $GL(n;\mathbf{R})$ 的恒等自同构. 实际上只需将 γ 定义为 $\gamma(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A(n;\mathbf{R}), a \in GL(n;\mathbf{R})$. 群 $A(n;\mathbf{R})$ 是 $\mathbf{R}^n$ 和 $GL(n;\mathbf{R})$ 的半直积, 即对每个 $\widetilde{a} \in A(n;\mathbf{R})$ 有唯一的二元组 $(a,\xi) \in GL(n;\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n$ 使得 $\widetilde{a} = \alpha(\xi) \cdot \gamma(a)$.

流形 M 在 x 点的仿射标架由一个点 $p \in A_x(M)$ 和 x 点处的一个线性标架 $(X_1,\cdots,X_n)$ 组成, 并且将它记为 $(p;X_1,\cdots,X_n)$. 设 0 是 R^n 的原点且 $(e_1,\cdots,e_n)$

是 R^n 的自然基, 则称 $(0;e_1,\cdots,e_n)$ 为 A^n 的规范标架. x 点处的每个仿射标架 $(p;X_1,\cdots,X_n)$ 可等同于一个将 $(0;e_1,\cdots,e_n)$ 映射成 $(p;X_1,\cdots,X_n)$ 的仿射变换 $\widetilde{u}:A^n\to A_x(M)$, 因为 $(p;X_1,\cdots,X_n)\leftrightarrow\widetilde{u}$ 给出了 x 点的仿射标架集合与 A^n 到 $A_x(M)$ 的仿射变换集合之间的一一对应. 用 $A(M)$ 表示 M 的所有仿射标架的集合并且通过对 x 点的每个仿射标架 $\widetilde{u}$ 置 $\widetilde{\pi}(\widetilde{u})=x$ 而定义射影 $\widetilde{\pi}:A(M)\to M$. 我们将证明 $A(M)$ 是 M 上带结构群 $A(n;\mathbf{R})$ 的主纤维丛并将 $A(M)$ 称为 M 上的仿射标架丛. 将 $A(n;\mathbf{R})$ 在 M 上的作用定义为 $(\widetilde{u},\widetilde{a})\to\widetilde{u}\,\widetilde{a},\widetilde{u}\in A(M),\widetilde{a}\in A(n;\mathbf{R})$. 其中 $\widetilde{u}\,\widetilde{a}$ 是仿射变换 $\widetilde{a}:A^n\to A^n$ 和 $\widetilde{u}:A^n\to A_x(M)$ 的复合. 容易证明 (参看第一章例 5.2)$A(n;\mathbf{R})$ 自由地右作用在 M 上并且 $A(M)$ 是 M 上带结构群 $A(n;\mathbf{R})$ 的主纤维丛.

令 $L(M)$ 是 M 上的线性标架丛. 对应于同态 $\beta:A(n;\mathbf{R})\to GL(n;\mathbf{R})$ 和 $\gamma:GL(n;\mathbf{R})\to A(n;\mathbf{R})$, 则有相应的同态 $\beta:A(M)\to L(M)$ 和 $\gamma:L(M)\to A(n)$. 即 $\beta:A(M)\to L(M)$ 将 $(p;X_1,\cdots,X_n)$ 映射成 $(X_1,\cdots,X_n)$ 而 $\gamma:L(M)\to A(M)$ 则把 $(X_1,\cdots,X_n)$ 映射成 $(0_x;X_1,\cdots,X_n)$ 其中 $0_x\in A_x(M)$ 是与 $T_x(M)$ 的原点相对应的点. 特别. $L(M)$ 可以看作 $A(M)$ 的一个子丛. 显然, $\beta\circ\gamma$ 是 $L(M)$ 的恒等变换.

M 的广义仿射联络是 M 的仿射标架丛 $A(M)$ 上的联络. 我们将研究广义仿射联络和线性联络之间的关系. 用 $\mathbf{R}^n$ 表示向量群 $\mathbf{R}^n$ 的 Lie 代数. 对应于群的分裂正合序列 $0\to\mathbf{R}^n\to A(n;\mathbf{R})\to GL(n;\mathbf{R})\to 1$ 则有下列 Lie 代数的分裂正合序列:

$$0\to\mathbf{R}^n\to\mathfrak{a}(n;\mathbf{R})\to\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})\to 0.$$

因而有

$$\mathfrak{a}(n;\mathbf{R})=\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})+\mathbf{R}^n\quad(\text{半直和}).$$

令 $\widetilde{\omega}$ 是 M 的广义仿射联络的联络形式. 那么 $\gamma^*\widetilde{\omega}$ 是 $L(M)$ 上的 $\mathfrak{a}(n;\mathbf{R})$ 值 1 形式. 令

$$\gamma^*\widetilde{\omega}=\omega+\varphi$$

是对应于 $\mathfrak{a}(n;\mathbf{R})=\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})+\mathbf{R}^n$ 的分解, 因而 ω 是 $L(M)$ 上的 $\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})$ 值 1 形式而 φ 是 $L(M)$ 上的 $\mathbf{R}^n$ 值 1 形式. 由第二章命题 6.4, ω 定义 $L(M)$ 的一个联络. 另一方面, 容易看出 φ 是 $L(M)$ 上的一个 $(GL(n;\mathbf{R}),\mathbf{R}^n)$ 型张量 1 形式 (参看第二章 2.5 节) 因而对应于 M 的一个 (1,1) 型张量场, 正如在第二章例 5.2 中所解释的那样.

命题 3.1 令 $\widetilde{\omega}$ 是 M 的广义仿射联络 $\widetilde{\Gamma}$ 的联络形式并且令

$$\gamma^*\widetilde{\omega}=\omega+\varphi,$$

其中 ω 是 $\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})$ 值的且 φ 是 $\mathbf{R}^n$ 值的. 令 $\varGamma$ 是由 ω 定义的 M 的线性联络, 令 K 是由 φ 定义的 M 的 (1,1) 型张量场. 那么

(1) 在 M 的广义仿射联络的集合与由 M 的线性联络和 M 的 (1,1) 型张量场构成的序对的集合之间由 $\widetilde{\varGamma}\to(\varGamma,K)$ 给出的对应是一一的.

(2) 同态 $\beta: A(M)\to L(M)$ 把 $\widetilde{\varGamma}$ 映射成 $\varGamma$(参看第二章 2.6 节).

证明 (1) 只需证明给出一个序对 $(\varGamma,K)$, 相应就有一个产生 $(\varGamma,K)$ 的 $\widetilde{\varGamma}$. 令 ω 是 $\varGamma$ 的联络形式而 φ 是 $L(M)$ 上对应于 K 的 $(GL(n;\mathbf{R}),\mathbf{R}^n)$ 型张量 1 形式. 给定一个向量 $\widetilde{X}\in T_{\widetilde{u}}(A(M))$. 选取 $X\in T_u(L(M))$ 和 $\widetilde{a}\in A(n;\mathbf{R})$ 使得 $\widetilde{u}=u\widetilde{a}$ 并且 $\widetilde{X}-R_{\widetilde{a}}(X)$ 是水平的. 存在一个元素 $A\in\mathfrak{a}(n;\mathbf{R})$ 使得

$$\widetilde{X}=R_{\widetilde{a}}(X)+A_u^*,$$

其中 A^* 是对应于 A 的基本向量. 将 $\widetilde{\omega}$ 定义为

$$\widetilde{\omega}(\widetilde{X})=\mathrm{ad}(a^{-1})(\omega(X)+\varphi(X))+A.$$

可直接验证 $\widetilde{\omega}$ 定义我们所要求的联络 $\widetilde{\varGamma}$.

(2) 令 $\widetilde{X}\in T_{\widetilde{u}}(A(M))$. 置 $u=\beta(\widetilde{u})$ 和 $X=\beta(\widetilde{X})$ 因而 $X\in T_u(L(M))$. 因为 $\beta: A(M)\to L(M)$ 是与同态 $\beta: A(n;\mathbf{R})\to GL(n;\mathbf{R})=A(n;\mathbf{R})/\mathbf{R}^n$ 相伴的同态, 所以 $L(M)$ 能够等同于 $A(M)/\mathbf{R}^n$ 而且 $\beta: A(M)\to L(M)$ 可以看成自然射影 $A(M)\to A(M)/\mathbf{R}^n$. 因为 $X=\beta(X)=\beta(\widetilde{X})$, 所以存在 $\widetilde{a}\in\mathbf{R}^n\subset A(n;\mathbf{R})$ 和 $A\in\mathbf{R}^n\subset\mathfrak{a}(n;\mathbf{R})$ 使得 $\widetilde{u}=u\widetilde{a}$ 且 $\widetilde{X}=R_{\widetilde{a}}(X)+A_u^*$. 设 $\widetilde{X}$ 关于 $\widetilde{\Gamma}$ 是水平的, 因而 $0=\widetilde{\omega}(\widetilde{X})=\widetilde{\omega}(R_{\widetilde{a}}(X))+\widetilde{\omega}(A_u^*)=\mathrm{ad}(\widetilde{a}^{-1})(\widetilde{\omega}(X))+A$. 从而有 $\widetilde{\omega}(X)=\mathrm{ad}(\widetilde{a})(A)$ 和 $\omega(X)+\varphi(X)=\mathrm{ad}(\widetilde{a})(A)$. 因为 $\varphi(X)$ 和 $\mathrm{ad}(\widetilde{a})(A)$ 都在 $\mathbf{R}^n$ 中而 $\omega(X)$ 在 $\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})$ 中, 所以有 $\omega(X)=0$. 这证明若 $\widetilde{X}$ 关于 $\widetilde{\Gamma}$ 是水平的, 那么 $\beta(\widetilde{X})$ 关于 $\varGamma$ 也必然是水平的. 证毕.

命题 3.2 在命题 3.1 中令 $\widetilde{\Omega}$ 和 Ω 分别是 $\widetilde{\varGamma}$ 和 $\varGamma$ 的曲率形式, 那么

$$\gamma^*\widetilde{\Omega}=\Omega+D\varphi,$$

其中 D 是关于 $\varGamma$ 的协变外微分.

证明 令 $X,Y\in T_u(L(M))$. 为证明 $(\gamma^*\widetilde{\Omega})(X,Y)=\Omega(X,Y)+D\varphi(X,Y)$, 只需考虑下列两种情况: (1) X 和 Y 中至少有一个是垂直的, (2) X 和 Y 关于 $\varGamma$ 都是水平的. 在第一种情况下, 等式两边都为零. 在每二种情况下, $\omega(X)=\omega(Y)=0$, 因此 $\widetilde{\omega}(X)=\varphi(X)$ 且 $\widetilde{\omega}(Y)=\varphi(Y)$. 从 $\widetilde{\varGamma}$ 的结构方程得

$$d\widetilde{\omega}(X,Y)=-\frac{1}{2}[\widetilde{\omega}(X),\widetilde{\omega}(Y)]+\widetilde{\Omega}(X,Y)$$

$$= -\frac{1}{2}[\varphi(X), \varphi(Y)] + \widetilde{\Omega}(X, Y).$$

(在这里由于将 $L(M)$ 看作 $A(M)$ 的子丛, 因而可将 $\gamma(X)$ 与 X 等同.) 另一方面, $\gamma^* d\widetilde{\omega} = d\omega + d\varphi$ 从而有 $d\widetilde{\omega}(X,Y) = d\omega(X,Y) + d\varphi(X,Y)$. 因为 $\mathbf{R}^n$ 是 Abel 群, 所以 $[\varphi(X), \varphi(Y)] = 0$. 从而 $d\omega(X,Y) + d\varphi(X,Y) = \widetilde{\Omega}(X,Y)$. 由于 X 和 Y 都是水平的, 所以 $D\omega(X,Y) + D\varphi(X,Y) = \widetilde{\Omega}(X,Y)$. 证毕.

再考虑广义仿射联络 $\widetilde{\Gamma}$ 的结构方程:

$$d\widetilde{\omega} = -\frac{1}{2}[\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}] + \widetilde{\Omega}.$$

通过将方程两边限制在 $L(M)$ 上, 并且比较 $\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})$ 分量和 $\mathbf{R}^n$ 分量, 则得到

$$d\varphi(X,Y) = -\frac{1}{2}([\omega(X), \varphi(Y)] - [\omega(Y), \varphi(X)]) + D\varphi(X,Y),$$
$$d\omega(X,Y) = -\frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X,Y), \quad X, Y \in T_u(L(M)).$$

正如在 3.2 节中那样, 可以写成

$$d\varphi = -\omega \wedge \varphi + D\varphi,$$
$$d\omega = -\omega \wedge \omega + \Omega.$$

沿用命题 3.1 的记号, 若 $\mathbf{R}^n$ 值 1 形式 φ 是 3.2 节中定义的标准形式 θ, 则将广义仿射联络 $\widetilde{\Gamma}$ 称为仿射联络. 换句话说, 若对应于 φ 的张量场 K 是 M 的切空间的恒等变换场, 则 $\widetilde{\Gamma}$ 是一个仿射联络. 作为命题 3.1 的直接推论我们有

定理 3.3 同态 $\beta : A(M) \to L(M)$ 把 M 的每个仿射联络 $\widetilde{\Gamma}$ 映射成 M 的线性联络 Γ. 而且 $\widetilde{\Gamma} \to \Gamma$ 在 M 的仿射联络 $\widetilde{\Gamma}$ 的集合与 M 的线性联络 Γ 的集合之间给出一个一一对应.

按照惯例, "线性联络" 和 "仿射联络" 这两个术语可以互换使用. 由定理 3.3, 这样作是合理的. 尽管我们并不破除这一惯例, 但在必要时我们仍将作出线性联络与仿射联络之间的逻辑上的区分. M 的线性联络是 $L(M)$ 上的联络而仿射联络则是 $A(M)$ 上的联络.

从命题 3.2 又可得出

命题 3.4 令 Θ 和 Ω 是 M 的线性联络 Γ 的挠率形式和曲率形式. 令 $\widetilde{\Omega}$ 是相应仿射联络的曲率形式. 那么

$$\gamma^* \widetilde{\Omega} = \Theta + \Omega,$$

其中 $\gamma : L(M) \to A(M)$ 是自然内射.

在下列公式中用标准形式 θ 代替 φ:

$$d\varphi = -\omega \wedge \varphi + D\varphi, \quad d\omega = -\omega \wedge \omega + \Omega,$$

那么我们将会重新发现在定理 2.4 中证明过的线性联络的结构方程.

令 $\Phi(\widetilde{u})$ 是 M 的仿射联络 $\widetilde{\Gamma}$ 关于基点 $\widetilde{u} \in A(M)$ 的和乐群. 令 $\Phi(u)$ 是 M 的相应线性联络 Γ 关于基点 $u = \beta(\widetilde{u}) \in L(M)$ 的和乐群. 把 $\Phi(\widetilde{u})$ 称为 $\widetilde{\Gamma}$ 或 Γ 的仿射和乐群而把 $\Phi(u)$ 称为 $\widetilde{\Gamma}$ 或 Γ 的线性和乐群 (或者称为齐次和乐群). 还可相应地定义限制仿射和乐群 $\Phi^0(\widetilde{u})$ 和限制线性和乐群 $\Phi^0(u)$. 从第二章命题 6.1 又可得到

命题 3.5　同态 $\beta : A(n;\mathbf{R}) \to GL(n;\mathbf{R})$ 将 $\Phi(\widetilde{u})$ 映射到 $\Phi(u)$ 上, 并且把 $\Phi^0(\widetilde{u})$ 映射到 $\Phi^0(u)$ 上.

3.4 展　　开

本节我们将研究由流形 M 的仿射联络所产生的平行移动. 令 $\tau = x_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是 M 上的一条曲线. 沿 τ 的仿射平移是由 $A(M)$ 中给定的联络定义的从 x_0 点的仿射切空间到 x_1 点的仿射切空间的一个仿射变换. 它是伴随从上平移的特殊情况, 在目前情况下, 该伴随丛是纤维为 $A_x(M) (x \in M)$ 的仿射切丛. 我们将用 $\widetilde{\tau}$ 来表示这种仿射平移.

M 上的仿射切丛的全空间 (即丛空间) 自然同胚于 M 上的切 (向量) 丛的全空间; 两者之间的差别是: 仿射切丛是伴随于 $A(M)$ 的而切 (向量) 丛则是伴随于 $L(M)$ 的. 仿射切丛的截面被称为点场. 在点场的集合与向量场的集合之间有一个自然的一一对应.

令 $\widetilde{\tau}_s^t$ 是沿着曲线 τ 从 x_t 到 x_s 的仿射平移. 特别 $\widetilde{\tau}_0^t$ 是沿着 τ(按相反的方向) 从 x_t 到 x_0 的平移 $A_{x_t}(M) \to A_{x_0}(M)$. 令 p 是沿 τ 定义的一个点场因而对每个 t, p_{x_t} 是 $A_{x_t}(M)$ 中的一个元素. 那么 $\widetilde{\tau}_0^t(p_{x_t})$ 描绘出 $A_{x_0}(M)$ 中的一条曲线. 我们将曲线 $\tau = x_t$ 等同于沿 τ 的平凡点场, 即与沿 τ 的零向量场相应的点场. 那么 M 中的曲线 τ 到仿射切空间 $A_{x_0}(M)$ 中的展开是 $A_{x_0}(M)$ 中的曲线 $\widetilde{\tau}_0^t(x_t)$.

下列命题使我们能用线性平移 (即由相应线性联络定义的平移) 得到曲线的展开.

命题 4.1　在 M 中给定一条曲线 $\tau = x_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$, 置 $Y_t = \tau_0^t(\dot{x}_t)$, 其中 τ_0^t 是沿 τ 从 x_t 到 x_0 的线性平移而 $\dot{x}_t$ 是 τ 在 x_t 点的切向量. 令 $C_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是 $A_{x_0}(M)$ 中从原点出发的一条曲线 (即 $C_0 = x_0$) 且使得对每个 $t, \dot{C}_t$(在仿射空间 $A_{x_0}(M)$ 中按通常意义) 平行于 Y_t. 那么 C_t 是 τ 到 $A_{x_0}(M)$ 中的展开.

证明　令 u_0 是 $L(M)$ 中使得 $\pi(u_0) = x_0$ 的任何点, 并且 u_t 是 x_t 在 $L(M)$ 中关于线性联络的水平提升. 令 $\widetilde{u}_t$ 是 x_t 在 $A(M)$ 中关于仿射联络的水平提升且使得 $\widetilde{u}_0 = u_0$. 因为同态 $\beta : A(M) \to L(M) = A(M)/\mathbf{R}^n$(参看 3.3 节) 把 $\widetilde{u}_t$ 映射成 u_t, 所以在 $\mathbf{R}^n \subset A(n;\mathbf{R})$ 中有一条曲线 $\widetilde{a}_t$ 使得 $\widetilde{u}_t = u_t\widetilde{a}_t$ 并且 $\widetilde{a}_0$ 是单位元. 正如第二章命题 3.1 的证明中那样, 为使 $\widetilde{u}_t$ 关于仿射联络是水平的. 就要求出关于 $\widetilde{a}_t$ 的充分必要条件. 就像在第二章命题 3.1 的证明中那样, 从由 Leibnitz 公式得出的

$$\dot{\widetilde{u}}_t = \dot{u}_t\widetilde{a}_t + u_t\dot{\widetilde{a}}_t$$

则得

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}(\dot{\widetilde{u}}_t) &= \mathrm{ad}(\widetilde{a}_t^{-1})(\widetilde{\omega}(\dot{u}_t)) + \widetilde{a}_t^{-1}\dot{\widetilde{a}}_t \\ &= \mathrm{ad}(\widetilde{a}_t^{-1})(\omega(\dot{u}_t) + \theta(\dot{u}_t)) + \widetilde{a}_t^{-1}\dot{\widetilde{a}}_t = \mathrm{ad}(\widetilde{a}_t^{-1})(\theta(\dot{u}_t)) + \widetilde{a}_t^{-1}\dot{\widetilde{a}}_t,\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{\omega}$ 和 ω 分别是仿射联络和线性联络的联络形式. 因而 $\widetilde{u}_t$ 是水平的当且仅当 $\theta(\dot{u}_t) = -\dot{\widetilde{a}}_t\widetilde{a}_t^{-1}$. 从而有

$$\begin{aligned}Y_t = \tau_0^t(\dot{x}_t) &= u_0(u_t^{-1}(\dot{x}_t)) = u_0(\theta(\dot{u}_t)) \\ &= -u_0(\dot{\widetilde{a}}_t\widetilde{a}_t^{-1}) = -u_0(d\widetilde{a}_t/dt).\end{aligned}$$

另一方面又有

$$C_t = \widetilde{\tau}_0^t(x_t) = u_0(\widetilde{u}_t^{-1}(x_t)) = u_0(\widetilde{a}_t^{-1}(u_t^{-1}(x_t))) = u_0(\widetilde{a}_t^{-1}(0)).$$

因而

$$dC_t/dt = -u_0(d\widetilde{a}_t/dt) = Y_t.$$

证毕.

推论 4.2　曲线 $\tau = x_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 到 $A_{x_0}(M)$ 中的展开是一条线段当且仅当沿 $\tau = x_t$ 的向量场 $\dot{x}_t$ 是平行的.

证明　在命题 4.1 中, C_t 是一条线段当且仅当 Y_t 不依赖于 t. 另一方面, Y_t 不依赖于 t 当且仅当 $\dot{x}_t$ 是沿 τ 的平行向量场.　证毕.

3.5　曲率张量和挠率张量

前面已经定义了线性联络的挠率形式 Θ 和曲率形式 Ω. 现在我们来定义挠率张量场 (简称挠率)T 和曲率张量场 (简称曲率)R. 对于 $X, Y \in T_x(M)$, 置

$$T(X,Y) = u(2\Theta(X^*, Y^*)),$$

其中 u 是 $L(M)$ 的适合 $\pi(u)=x$ 的任何点而且 X^* 和 Y^* 是 $L(M)$ 在 u 点满足 $\pi(X^*)=X$ 和 $\pi(Y^*)=Y$ 的向量. 我们已经知道 $T(X,Y)$ 不依赖于 u, X^*, Y^* 的选取 (参看第二章例 5.2); 这个事实也容易直接验证. 因而在 M 的每一点 x 处, T 定义一个斜对称双线性映射 $T_x(M)\times T_x(M)\to T_x(M)$. 换句话说, T 是一个 (1,2) 型张量场且使得 $T(X,Y)=-T(Y,X)$. 我们将 $T(X,Y)$ 称为 $T_x(M)$ 中由 X 和 Y 决定的挠率平移. 类似地置

$$R(X,Y)Z=u(2\Omega(X^*,Y^*))(u^{-1}Z),\quad X,Y,Z\in T_x(M),$$

其中 u, X^*, Y^* 的选取如上. 那么 $R(X,Y)Z$ 只依赖于 X,Y,Z; 而不依赖于 u,X^* 和 Y^*. 在上面的定义中. $(2\Omega(X^*,Y^*))(u^{-1}Z)$ 表示 $u^{-1}Z\in \mathbf{R}^n$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的线性自同态 $2\Omega(X^*,Y^*)\in\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})$ 下的象. 因而 $R(X,Y)$ 是 $T_x(M)$ 的自同态并且称为由 X 和 Y 决定的 $T_x(M)$ 的曲率变换. 由此可知, R 是一个满足 $R(X,Y)=-R(Y,X)$ 的 (1,3) 型张量场.

命题 5.1 利用协变微分, 则挠率 T 和曲率 R 可以表示成下列形式:

$$\begin{aligned}T(X,Y)&=\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y],\\ R(X,Y)Z&=[\nabla_X,\nabla_Y]Z-\nabla_{[X,Y]}Z,\end{aligned}$$

其中 X,Y,Z 均为 M 上的向量场.

证明 令 X^*,Y^*,Z^* 分别是 X,Y,Z 的水平提升. 首先证明下列引理.

引理 $(\nabla_XY)_x=u(X_u^*(\theta(Y^*)))$, 其中 $\pi(u)=x$.

引理的证明 在命题 1.1 的引理中, 已经证明了 $(\nabla_XY)_x=u(X_u^*f)$, 其中 f 是一个由 $f(u)=u^{-1}(Y_x)$ 定义的 $\mathbf{R}^n$ 值函数. 因而对于 $u\in L(M), f(u)=\theta(Y_u^*)$. 这就完成了引理的证明.

因此就有

$$\begin{aligned}T(X_x,Y_x)&=u(2\Theta(X_u^*,Y_u^*))\\&=u(X_u^*(\theta(Y^*))-Y_u^*(\theta(X^*))-\theta([X^*,Y^*])\\&=(\nabla_XY)_x-(\nabla_YX)_x-[X,Y]_x,\end{aligned}$$

因为 $\pi([X^*,Y^*])=[X,Y]$.

为了证明第二个等式, 置 $f=\theta(Z^*)$, 那么 f 是 $L(M)$ 上的 $(GL(n;\mathbf{R}),\mathbf{R}^n)$ 型的 $\mathbf{R}^n$ 值函数. 于是就有

$$\begin{aligned}([\nabla_X,\nabla_Y]Z-\nabla_{[X,Y]}Z)_x&=u(X_u^*(Y^*f)-Y_u^*(X^*f)-(h[X^*,Y^*])_uf)\\&=u((v[X^*,Y^*])_u),\end{aligned}$$

其中 h(或v) 表示水平 (垂直) 分量. 令 A 是 $\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})$ 的一个元素且满足 $A_u^* = (v[X^*,Y^*])_u$, 其中 A^* 是对应于 A 的基本向量场. 那么由第二章推论 5.3 则有

$$2\Omega(X_u^*,Y_u^*) = -\omega([X^*,Y^*]_u) = -A.$$

另一方面, 若 a_t 是由 A 生成的 $GL(n;\mathbf{R})$ 的单参数子群, 那么

$$\begin{aligned}A_u^*f &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(ua_t) - f(u)]\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[a_t^{-1}(f(u)) - f(u)] = -A(f(u)),\end{aligned}$$

其中 $A(f(u))$ 表示将线性变换 $A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 应用于 $f(u)\in\mathbf{R}^n$ 的结果. 所以有

$$\begin{aligned}&([\nabla_X,\nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z)_x = u((v[X^*,Y^*])_u f) = u(-A(f(u)))\\ &= u(2\Omega(X_u^*,Y_u^*)(f(u))) = u(2\Omega(X_u^*,Y_u^*)(u^{-1}Z)) = R(X,Y)Z.\end{aligned}$$

证毕.

命题 5.2　令 $X,Y,Z,W\in T_x(M)$ 且 $u\in L(M)$ 适合 $\pi(u)=x$. 令 X^*,Y^*,Z^* 和 W^* 是 $L(M)$ 上分别对应于 $u^{-1}X,u^{-1}Y,u^{-1}Z$ 和 $u^{-1}W$ 的标准水平向量场. 因而 $\pi(X_u^*)=X,\pi(Y_u^*)=Y,\pi(Z_u^*)=Z,\pi(W_u^*)=W$. 那么

$$\begin{aligned}&(\nabla_X T)(Y,Z) = u(X_u^*(2\Theta(Y^*,Z^*))),\\ &((\nabla_X R)(Y,Z))W = u((X_u^*(2\Omega(Y^*,Z^*)))(u^{-1}W)).\end{aligned}$$

证明　我们只证明第一个公式, 第二个公式的证明与第一个类似. 把挠率 T 看作标准纤维是 $\mathbf{R}^n$ 上的 (1,2) 型张量空间 $\boldsymbol{T}_2^1$ 的张量丛 $T_2^1(M)$ 的截面. 就像第二章例 5.2 中那样, 令 f 是 $L(M)$ 上对应于挠率 T 的 $\boldsymbol{T}_2^1$ 值函数, 因而若置 $\eta=u^{-1}Y,\zeta=u^{-1}Z$, 那么

$$f_u(\eta,\zeta) = u^{-1}(T(Y,Z)) = 2\Theta(Y_u^*,Z_u^*).$$

由命题 1.3, X_u^*f 对应于 $\nabla_X T$. 从而

$$\begin{aligned}u^{-1}((\nabla_X T)(Y,Z)) &= (X_u^*f)(\eta,\zeta)\\ &= X_u^*(f(\eta,\zeta)) = X_u^*(2\Theta(Y^*,Z^*))\end{aligned}$$

于是第一个公式得证.　证毕.

利用命题 5.2 就可以用 T、R 以及它们的协变导数表示 Bianchi 恒等式 (定理 2.5).

定理 5.3　令 T 和 R 是 M 的线性联络的挠率和曲率. 那么对于 $X,Y,Z\in T_x(M)$, 就有

Bianchi 第一恒等式：

$$\mathfrak{S}\{R(X,Y)Z\} = \mathfrak{S}\{T(T(X,Y),Z) + (\nabla_X T)(Y,Z)\};$$

Bianchi 第二恒等式：

$$\mathfrak{S}\{(\nabla_X R)(Y,Z) + R(T(X,Y),Z)\} = 0,$$

其中 $\mathfrak{S}$ 表示对 X,Y,Z 的循环和.

特别, 若 $T=0$, 那么

Bianchi 第一恒等式：$\mathfrak{S}\{R(X,Y)Z\} = 0$;

Bianchi 第二恒等式：$\mathfrak{S}\{(\nabla_X R)(Y,Z)\} = 0$.

证明 令 u 是 $L(M)$ 的任何使 $\pi(u)=x$ 的点. 像命题 5.2 中的那样把 X 提升为 u 点的水平向量, 然后将它扩张成 $L(M)$ 上的标准水平向量场 X^*. 类似地定义 Y^* 和 Z^*. 我们将从

$$D\Theta = \Omega \wedge \theta \quad (\text{定理}2.5)$$

导出第一个恒等式. 一方面有

$$\begin{aligned} 6(\Omega\wedge\theta)(X_u^*,Y_u^*,Z_u^*) &= \mathfrak{S}\{2\Omega(X_u^*,Y_u^*)\theta(Z_u^*)\} \\ &= \mathfrak{S}\{u^{-1}(R(X,Y)Z)\}. \end{aligned}$$

另一方面, 由第一章命题 3.11, 又有

$$\begin{aligned} 6D\Theta(X_u^*,Y_u^*,Z_u^*) &= 6d\Theta(X_u^*,Y_u^*,Z_u^*) \\ &= \mathfrak{S}\{X_u^*(2\Theta(Y^*,Z^*)) - 2\Theta([X^*,Y^*]_u,Z_u^*)\}. \end{aligned}$$

由命题 5.2, $X_u^*(2\Theta(Y^*,Z^*)) = u^{-1}((\nabla_X T)(Y,Z))$. 因此只需证明

$$-2\Theta([X^*,Y^*]_u,Z_u^*) = u^{-1}(T(T(X,Y),Z)).$$

首先注意到

$$\begin{aligned} \pi([X^*,Y^*]_u) &= u(\theta([X^*,Y^*]_u)) = -u(2d\theta(X_u^*,Y_u^*)) \\ &= -u(2\Theta(X_u^*,Y_u^*)) = -T(X,Y). \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} -2\Theta([X^*,Y^*]_u,Z_u^*) &= -u^{-1}(T(\pi[X^*,Y^*]_u,Z)) \\ &= u^{-1}(T(T(X,Y),Z)). \end{aligned}$$

现在从

$$D\Omega = 0 \quad (\text{定理}2.5)$$

导出第二恒等式. 一方面有

$$\begin{aligned} 0 &= 3D\Omega(X_u^*, Y_u^*, Z_u^*) \\ &= \mathfrak{S}\{X_u^*(\Omega(Y^*, Z^*)) - \Omega([X^*, Y^*]_u, Z_u^*)\}. \end{aligned}$$

另一方面, 由命题 5.2 又有

$$X_u^*(\Omega(Y^*, Z^*)) = \frac{1}{2}u^{-1}((\nabla_X R)(Y, Z)).$$

正如在第一个恒等式的证明中那样有

$$-\Omega([X^*, Y^*]_u, Z_u^*) = \frac{1}{2}u^{-1}(R(T(X, Y), Z)).$$

于是从这些公式即可得出第二个恒等式. 证毕.

评注 定理 5.3 也能用定理 5.1 中的公式证明 (例如可以参看 Nomizu [7; pp.61–62]).

命题 5.4 令 B 和 B' 是 $L(M)$ 上的任意标准水平向量场, 那么就有

(1) 若 $T = 0$, 则 $[B, B']$ 是垂直的;

(2) 若 $R = 0$, 则 $[B, B']$ 是水平的.

证明 (1) $\theta([B, B']) = -2d\theta(B, B') = -2\Theta(B, B') = 0$. 因此 $[B, B']$ 是垂直的. (2) $\omega([B, B']) = -2d\omega(B, B') = -2\Omega(B, B') = 0$. 因此 $[B, B']$ 是水平的. 证毕.

令 $P(u_0)$ 是 $L(M)$ 的过 $u_0 \in L(M)$ 点的和乐子丛而 $\Phi(u_0)$ 是以 u_0 为基点的线性和乐群. 令 $A_1, \cdots, A_r$ 是 $\Phi(u_0)$ 的 Lie 代数的基并且 $A_1^*, \cdots, A_r^*$ 是对应的基本向量场. 令 $B_1, \cdots, B_n$ 是与 $\mathbf{R}^n$ 的基 $e_1, \cdots, e_n$ 相对应的标准水平向量场. 这些 (原本定义在 $L(M)$ 上的) 向量场 $A_1^*, \cdots, A_r^*, B_1, \cdots, B_n$ 限制在 $P(u_0)$ 上则定义 $P(u_0)$ 上的向量场. 正如在命题 2.6 中那样, 它们定义 $P(u_0)$ 上的绝对平行性. 由于 $[A_i^*, A_j^*]$ 是对应于 $[A_i, A_j]$ 的基本向量场, 因而是 $A_1^*, \cdots, A_r^*$ 的带常系数的线性组合. 由命题 2.3, $[A_i^*, B_j]$ 是对应于 $A_i e_j \in \mathbf{R}^n$ 的标准水平向量场. 下列命题给出关于 $[B_i, B_j]$ 的某些信息.

命题 5.5 令 $P(u_0)$ 是 $L(M)$ 的过 u_0 的和乐丛. 令 B 和 B' 是任意标准水平向量场. 则有

(1) 如果 $\nabla T = 0$, 那么 $[B, B']$ 的水平分量与 $P(u_0)$ 上的标准水平向量场一致.

(2) 如果 $\nabla R = 0$, 那么 $[B, B']$ 的垂直分量与 $P(u_0)$ 上的基本向量场 A^* 一致. 这里 A^* 是与线性和乐群 $\Phi(u_0)$ 的 Lie 代数的元素 A 对应的基本向量场.

证明 (1) 令 X^* 是 $u \in L(M)$ 点的任何水平向量. 置 $X = \pi(X^*), Y = \pi(B_u), Z = \pi(B'_u)$. 由命题 5.2 得

$$X^*(2\Theta(B, B')) = u^{-1}((\nabla_X T)(Y, Z)) = 0.$$

这意味着 $\Theta(B, B')$ 是 $P(u_0)$ 上的一个 (在 $\mathbf{R}^n$ 中取值的) 常值函数. 因为 $\theta([B, B']) = -2\Theta(B, B')$, 所以 $[B, B']$ 的水平分量在 $P(u_0)$ 上与对应于 $\mathbf{R}^n$ 的元素 $-2\Theta(B, B')$ 的标准水平向量场一致.

(2) 再由命题 5.2, $\nabla R = 0$ 蕴涵着

$$X^*(\Omega(B, B')) = 0.$$

这意味着 $\Omega(B, B')$ 是 $P(u_0)$ 上的 (在 $\Phi(u_0)$ 的 Lie 代数中取值的) 常函数. 因为 $\omega([B, B']) = -2\Omega(B, B')$, 所以 $[B, B']$ 的垂直分量在 $P(u_0)$ 上与对应于 $\Phi(u_0)$ 的 Lie 代数的元素 $-2\Omega(B, B')$ 的基本向量场一致. 证毕.

由此可知, 若 $\nabla T = 0$ 且 $\nabla R = 0$, 那么 $[B_i, B_j]$ 在 $P(u_0)$ 上的限制与 $A_1^*, \cdots, A_r^*, B_1, \cdots, B_n$ 的带常系数的线性组合在 $P(u_0)$ 上一致. 因此我们有下列推论.

推论 5.6 令 $\mathfrak{g}$ 是和乐丛 $P(u_0)$ 上使得 $\theta(X)$ 和 $\omega(X)$ 是 (分别在 $\mathbf{R}^n$ 中和 $\Phi(u_0)$ 的 Lie 代数中取值的)$P(u_0)$ 上的常函数的所有向量场 X 的集合. 如果 $\nabla T = 0$ 且 $\nabla R = 0$, 那么 $\mathfrak{g}$ 构成一个 Lie 代数并且 $\dim\mathfrak{g} = \dim P(u_0)$.

上面定义的向量场 $A_1^*, \cdots, A_r^*, B_1, \cdots, B_n$ 形成 $\mathfrak{g}$ 的一个基.

3.6 测 地 线

设 $\tau = x_t (a < t < b, -\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$ 是带有线性联络的流形 M 上的一条 C^1 曲线, 若沿 τ 定义的向量场 $X = \dot{x}_t$ 是沿 τ 平行的, 即对所有 $t, \nabla_X X$ 存在并且等于 0, 其中 $\dot{x}_t$ 表示 τ 在 x_t 点的切向量. 那么就将该曲线 τ 称为测地线. 在测地线的定义中将所论曲线参数化是重要的.

命题 6.1 令 τ 是 M 中的一条 C^1 曲线. 使 τ 成为测地线的参数化表示, 假如存在, 则它在不计相差一个仿射变换 $t \to s = \alpha t + \beta$(其中 $\alpha \neq 0$ 和 β 均为常数) 的意义下是唯一确定的.

证明 令 x_t 和 y_s 是使曲线 τ 成为测地线的两种参数表示. 那么 s 是 t 的函数 $s = s(t)$ 并且 $y_{s(t)} = x_t$. 向量 $\dot{y}_s$ 等于 $\dfrac{dt}{ds}\dot{x}_t$. 因为沿 τ 的平移不依赖于参数表示 (参看第二章 2.3 节), 所以 $\dfrac{dt}{ds}$ 必然是异于零的常数. 从而 $s = \alpha t + \beta$, 其中 $\alpha \neq 0$. 证毕.

若 τ 是一条测地线, 那么使 τ 成为测地线的任何参数 t 称为仿射参数. 特别, 令 x 是测地线 τ 上的一点且 $X \in T_x(M)$ 是一个沿 τ 方向的向量. 那么 τ 有唯一

的仿射参数 $t, \tau = x_t$, 使得 $x_0 = x$ 且 $\dot{x}_0 = X$. 参数 t 称为 τ 的由 (x, X) 决定的仿射参数.

命题 6.2　过点 $x \in M$ 的 C^1 曲线 τ 是测地线当且仅当它到 $T_x(M)$ 的展开是一条直线 (的开区间).

证明　这是推论 4.2 的直接结论.　证毕.

测地线的另一种有用的解释是用线性标架从 $L(M)$ 给出的.

命题 6.3　$L(M)$ 的标准水平向量场的任何积分曲线到 M 上的射影都是一条测地线, 而且反过来, 任何一条测地线都能用这种方法得到.

证明　令 B 是 $L(M)$ 上对应于元素 $\xi \in \mathbf{R}^n$ 的标准水平向量场. 令 b_t 是 B 的一条积分曲线. 置 $x_t = \pi(b_t)$, 那么 $\dot{x}_t = \pi(\dot{b}_t) = \pi(B_{b_t}) = b_t\xi$, 其中 $b_t\xi$ 表示 ξ 在线性映射 $b_t : \mathbf{R}^n \to T_x(M)$ 下的象. 因为 b_t 是 x_t 的水平提升且 ξ 不依赖于 t, 所以 $b_t\xi$ 是沿曲线 x_t 平行的 (参看第二章 2.7 节, 尤其是命题 7.4 之前).

反过来, 令 x_t 是在包含 0 的某个开区间上定义的 M 上的测地线. 令 u_0 是 $L(M)$ 中使得 $\pi(u_0) = x_0$ 的任何点. 置 $\xi = u_0^{-1}\dot{x}_0 \in \mathbf{R}^n$. 令 u_t 是 x_t 的经过 u_0 点的水平提升. 因为 x_t 是测地线, 所以有 $\dot{x}_t = u_t\xi$. 因为 u_t 是水平的, 又因为 $\theta(\dot{u}_t) = u_t^{-1}(\pi(\dot{u}_t)) = u_t^{-1}\dot{x}_t = \xi$, 所以 u_t 是标准水平向量场 B 对应于 ξ 的一条积分曲线.　证毕.

作为命题 6.3 的应用可得出下列定理.

定理 6.4　对任何点 $x \in M$ 和任何向量 $X \in T_x(M)$ 都有唯一满足初始条件 (x, X) 的测地线, 即有唯一的一条测地线 x_t 使得 $x_0 = x$ 且 $\dot{x}_0 = X$.

命题 6.3 的另一个结论是: 一条测地线无疑是 C^1 曲线, 但假若线性联络是 C^∞ 的, 那么测地线也自动成为 C^∞ 的. 实际上, 每个标准水平向量场是 C^∞ 的, 从而它的积分曲线也是 C^∞ 的. $L(M)$ 中的 C^∞ 曲线到 M 上的射影是 M 中的 C^∞ 曲线.

M 的线性联络称作是完备的, 假如每条测地线都能扩张成对 $-\infty < t < \infty$ 有定义的测地线 $\tau = x_t$, 这里 t 是一个仿射参数. 换句话说, 对于任何 $x \in M$ 和 $X \in T_x(M)$, 定理 6.4 中满足初始条件 (x, X) 的测地线 $\tau = x_t$ 对 $-\infty < t < \infty$ 的所有 t 值都有定义. 从命题 6.3 可直接得到下列命题.

命题 6.5　M 的线性联络是完备的当且仅当 $L(M)$ 上的每个标准水平向量场是完备的.

回想到, 如果流形上的一个向量场能生成流形的一个整体单参数变换群, 则称该向量场是完备的.

当线性联络为完备的情况下, 就能在每一点 $x \in M$ 定义指数映射如下, 对于每个 $X \in T_x(M)$, 如同在定理 6.4 中那样令 $\tau = x_t$ 是满足初始条件 (x, X) 的测地线.

置

$$\exp X = x_1.$$

因而对每个 x 都有一个从 $T_x(M)$ 到 M 中的映射. 以后 (在 3.8 节中) 将在线性联络不必是完备的情况下定义指数映射并讨论它的可微性及其他性质.

3.7 在局部坐标系中的表示

本节我们将利用局部坐标系表示线性联络及相关概念.

令 M 是一个流形且 U 是 M 中带局部坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 的一个坐标邻域. 用 X_i 表示在 U 中定义的向量场 $\partial/\partial x^i, i = 1, \cdots, n$. 在 U 中的一点 x 处的每个线性标架能够唯一地表示成

$$\left(\sum_i X_1^i (X_i)_x, \cdots, \sum_i X_n^i (X_i)_x\right),$$

其中 $det(X_i^j) \neq 0$. 将 (x^i, X_k^j) 取作 $\pi^{-1}(U) \subset L(M)$ 中的一个局部坐标系 (参看第一章例 5.2). 令 (Y_k^j) 是 (X_k^j) 的逆矩阵因而 $\sum\limits_j X_i^j Y_j^k = \sum\limits_j Y_i^j X_j^k = \delta_i^k$.

首先用局部坐标系 (x^i, X_k^j) 表示标准形式 θ. 令 $e_1, \cdots, e_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的自然基并且置

$$\theta = \sum_i \theta^i e_i.$$

命题 7.1 利用局部坐标系 (x^i, X_k^j), 则标准形式 $\theta = \sum\limits_i \theta^i e_i$ 可以表示成

$$\theta^i = \sum_j Y_j^i dx^j.$$

证明 令 u 是 $L(M)$ 中坐标为 (x^i, X_k^j) 的点因而 u 将 e_i 映射成 $\sum\limits_j X_i^j (X_j)_x$, 其中 $x = \pi(u)$. 如果 $X^* \in T_u(L(M))$ 并且

$$X^* = \sum_j \lambda^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_u + \sum_{j,k} \bigwedge_k^j \left(\frac{\partial}{\partial X_k^j}\right)_u$$

因而 $\pi(X^*) = \sum\limits_j \lambda^j (X_j)_x$, 那么

$$\theta(X^*) = u^{-1}\left(\sum_j \lambda^i (X_j)_x\right) = \sum_{i,j} (Y_j^i \lambda^j) e_i.$$

证毕.

令 ω 是 M 的线性联络 Γ 的联络形式. 利用 $\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})$ 的基 $\{E_i^j\}$ 可以写成

$$\omega = \sum_{i,j} \omega_j^i E_i^j.$$

令 σ 是 $L(M)$ 在 U 上的截面, 它对每个 $x \in U$ 指派线性标架 $((X_1)_x, \cdots, (X_n)_x)$. 置

$$\omega_U = \sigma^* \omega.$$

那么 ω_U 是在 U 上定义的 $\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})$ 值 1 形式. 在 U 上用

$$\omega_U = \sum_{i,j,k} (\Gamma_{j,k}^i dx^i) E_i^k$$

定义 n^3 个函数 $\Gamma_{jk}^i, i,j,k = 1, \cdots, n$. 这些函数 Γ_{jk}^i 称为线性联络 Γ 关于局部坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 的分量 (或 Christoffel 符号). 应当注意, 它们不是张量场的分量. 事实上, 这些分量服从下列变换规律.

命题 7.2　令 Γ 是 M 上的一个线性联络. 令 Γ_{jk}^i 和 $\overline{\Gamma}_{jk}^i$ 分别是 Γ 关于局部坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 和局部坐标系 $\overline{x}^1, \cdots, \overline{x}^n$ 的分量. 那么在两个坐标邻域的交集上有

$$\overline{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha = \sum_{i,j,k} \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^\beta} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^\gamma} \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i} + \sum_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial \overline{x}^\beta \partial \overline{x}^\gamma} \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i}.$$

证明　我们将从第二章命题 1.4 来导出上面的公式. 令 V 是使坐标系 $\overline{x}^1, \cdots, \overline{x}^n$ 有效的坐标邻域. 令 $\overline{\sigma}$ 是 $L(M)$ 在 V 上的截面, 它对每个 $x \in V$ 指派线性标架 $((\partial/\partial\overline{x}^1)_x, \cdots, (\partial/\partial\overline{x}^n)_x)$. 对于 $x \in U \cap V$, 用

$$\overline{\sigma}(x) = \sigma(x) \cdot \psi_{UV}(x)$$

定义一个映射 $\psi_{UV}: U \cap V \to GL(n;\mathbf{R})$. 令 φ 是第一章 1.4 节中定义的 $GL(n;\mathbf{R})$ 上的 (左不变的 $\mathfrak{gl}(n;\mathbf{R})$ 值的) 标准 1 形式. 这个形式在第一章 1.4 节和在第二章 2.1 节中曾被记为 θ. 如果 (s_j^i) 是 $GL(n;\mathbf{R})$ 的自然坐标系而且 (t_j^i) 表示 (s_j^i) 的逆矩阵, 那么

$$\varphi = \sum_{i,j,k} t_j^i ds_k^j E_i^k.$$

其证明类似于命题 7.1 的证明. 容易验证

$$\psi_{UV}\text{的}(i,j)\text{分量} = (\partial x^i/\partial\overline{x}^j).$$

因而

$$\psi_{UV}^* \varphi = \sum_{\alpha,\beta} \left(\sum_i \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i} d\left(\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^\beta} \right) \right) E_\alpha^\beta = \sum_{\alpha,\beta} \left(\sum_{i,\gamma} \frac{\partial \overline{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \overline{x}^\beta \partial \overline{x}^\gamma} d\overline{x}^\gamma \right) E_\alpha^\beta.$$

利用现在的记号, 则第二章命题 1.4 中的公式可以表示成下列形式:

$$\omega_V = (\mathrm{ad}(\psi_{UV}^{-1}))\omega_U + \psi_{UV}^*\varphi.$$

通过简单计算可以看出这个公式等价于本命题的变换规则. 证毕.

从这些分量 Γ_{jk}^i 我们就可以重构联络形式 ω.

命题 7.3 假设对每一个局部坐标系 $x^1,\cdots,x^n$, 都能给定一组函数 $\Gamma_{jk}^i(i,j,k=1,\cdots,n)$ 使得它们满足命题 7.2 中的变换规则. 那么就有唯一的线性联络 Γ 使得它关于 $x^1,\cdots,x^n$ 的分量恰好是给定的那组函数 Γ_{jk}^i. 而且, 联络形式 $\omega=\sum\limits_{i,j}\omega_j^iE_i^j$ 可以利用局部坐标系 (x^i,X_k^j) 由下式给出

$$\omega_j^i=\sum_k Y_k^i\left(dX_j^k+\sum_{l,m}\Gamma_{ml}^kX_j^ldx^m\right),\quad i,j=1,\cdots,n.$$

证明 容易验证由上面的公式定义的形式 ω 在 $L(M)$ 中定义一个联络, 即 ω 满足第二章命题 1.1 的条件 (a') 和 (b'). ω 不依赖于局部坐标系这个事实常常从 Γ_{jk}^i 的变换规则得出, 这可以通过把命题 7.2 的证明过程倒过来加以证明. 上面用来定义 ω_U 的截面 $\sigma:U\to L(M)$ 可由局部坐标系 (x^i) 和 (x^i,X_k^j) 通过映射 $(x^i)\to(x^i,\delta_k^j)$ 给出. 因而 $\sigma^*\omega_j^i=\sum\limits_m\Gamma_{mj}^idx^m$. 这说明由 ω 定义的联络 Γ 的分量恰好是函数 Γ_{jk}^i. 证毕.

线性联络的分量也可以用协变导数来表示.

命题 7.4 令 $x^1,\cdots,x^n$ 是 M 上带线性联络 Γ 的一个局部坐标系. 置 $X_i=\partial/\partial x^i, i=1,\cdots,n$. 那么 Γ 关于 $x^1,\cdots,x^n$ 的分量 Γ_{jk}^i 由

$$\nabla_{X_j}X_i=\sum_k\Gamma_{ji}^kX_k$$

给出.

证明 令 X_j^* 是 X_j 的水平提升. 从命题 7.3 可知, 利用局部坐标系 (x^i,X_k^j), 则 X^* 可由下式给出

$$X_j^*=(\partial/\partial x^j)-\sum_{i,k,l}\Gamma_{jk}^iX_l^k(\partial/\partial X_l^i).$$

为了应用命题 1.3, 令 f 是 $\pi^{-1}(U)\subset L(M)$ 上对应于 X_i 的 $\mathbf{R}^n$ 值函数. 那么

$$f=\sum_k Y_i^ke_k.$$

由简单计算可知

$$X_j^* f = \sum_{k,l} \Gamma_{ji}^l Y_l^k e_k.$$

由命题 1.3, $X_j^* f$ 是对应于 $\nabla_{X_j} X_i$ 的函数. 因而

$$\nabla_{X_j} X_i = \sum_k \Gamma_{ji}^k X_k.$$ 证毕.

命题 7.5 假设给定一个映射 $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$. 记为 $(X, Y) \to \nabla_X Y$, 并且使它满足命题 2.8 的条件 (1) ~ (4). 那么 M 上有唯一的线性联络 Γ 使得 $\nabla_X Y$ 是 Y 沿 X 方向关于 Γ 的协变导数.

证明 在这里我们只给出证明纲要, 而把细节留给读者. 令 $x \in M$. 若 X, X', Y 和 Y' 都是 M 上的向量场, 而且在 x 的一个邻域中, $X = X', Y = Y'$, 那么 $(\nabla_X Y)_x = (\nabla_{X'} Y')_x$. 这就蕴涵着给定的映射 $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ 诱导一个同样满足命题 2.8 的条件 (1) ~ (4) 的映射 $\mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)$(其中 U 是 M 的任何开集). 特别, 若 U 是一个带局部坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 的坐标邻域, 则我们用命题 7.4 中给出的公式在 U 上定义 n^3 个函数 Γ_{jk}^i. 那么这些函数满足命题 7.2 的变换规则. 由命题 7.3, 它们定义一个线性联络 Γ. 显然, $\nabla_X Y$ 是 Y 沿 X 方向关于 Γ 的协变导数. 证毕.

令 η^i 是向量场 Y 关于局部坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 的分量, $Y = \sum_i \eta^i (\partial/\partial x^i)$. 令 $\eta_{;j}^i$ 是协变微分 ∇Y 的分量. 因而 $\nabla_X Y = \sum_i \eta_{;j}^i X_i$, 其中 $X_i = \partial/\partial x^i$. 从命题 7.4 和 2.8 可得出下列公式:

$$\eta_{;j}^i = \partial \eta^i / \partial x^j + \sum_k \Gamma_{jk}^i \eta^k.$$

若 X 是以 ξ^i 为分量的向量场, 则 $\nabla_X Y$ 的分量由 $\sum_j \eta_{;j}^i \xi^i$ 给出.

更一般地, 若 K 是以 $K_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r}$ 为分量的 (r, s) 型张量场, 那么 ∇K 的分量由下式给出

$$\begin{aligned} K_{j_1 \cdots j_s; k}^{i_1 \cdots i_r} = \partial K_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} / \partial x^k + \sum_{\alpha=1}^r \left(\sum_l \Gamma_{kl}^{i_\alpha} K_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots l \cdots i_r} \right) \\ - \sum_{\beta=1}^s \left(\sum_m \Gamma_{k j_\beta}^m K_{j_1 \cdots m \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} \right), \end{aligned}$$

其中 l 代替 i_α, m 代替 j_β. 这个公式的证明除了必须用命题 2.7 取代命题 2.8 之外, 与对向量场的情况是相同的. 如果 X 是以 ξ^i 为分量的向量场, 那么 $\nabla_X Y$ 的分量

由下式给出

$$\sum_k K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s;k}\xi^k.$$

我们可类似地定义高阶协变导数. 对于以 $K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 为分量的张量场 $K, \nabla^m K$ 的分量为 $K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s;k_1;\cdots;k_m}$.

挠率 T 的分量 T^i_{jk} 和曲率 R 的分量 R^i_{jkl} 定义为

$$T(X_j, X_k) = \sum_i T^i_{jk}X_i, \quad R(X_k, X_l)X_j = \sum_i R^i_{jkl}X_i.$$

而且它们可以用线性联络 Γ 的分量 Γ^i_{jk} 表示如下.

命题 7.6 $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$;

$$R^i_{jkl} = (\partial\Gamma^i_{lj}/\partial x^k - \partial\Gamma^i_{kj}/\partial x^l) + \sum_m(\Gamma^m_{lj}\Gamma^i_{km} - \Gamma^m_{kj}\Gamma^i_{lm}).$$

证明 这些公式可以从定理 5.1 和命题 7.4 直接得出. 证毕.

下列命题的证明由直接计算得出.

命题 7.7 (1) 若 f 是在 M 上定义的函数, 那么

$$f_{;k;j} - f_{;j;k} = \sum_i T^i_{kj}f_{;i}.$$

(2) 如果 X 是 M 上以 ξ^i 为分量的向量场, 那么

$$\xi^i_{;l;k} - \xi^i_{;k;l} = \sum_j R^i_{jkl}\xi^j + \sum_j T^j_{lk}\xi^i_{;j}.$$

因为 n^2+n 个 1 形式 $\theta^i, \omega^j_k (i,j,k = 1,\cdots,n)$ 定义绝对平行性 (命题 2.6), 所以 $L(M)$ 上的每个微分形式都能用这些 1 形式和函数来表示. 因为挠率形式 Θ 和曲率形式 Ω 都是张量形式, 所以它们都能用 n 个 1 形式 θ^i 和函数来表示. 我们用下列各式在 $L(M)$ 上定义一组函数 $\widetilde{T}^i_{jk}$ 和 $\widetilde{R}^i_{jkl}$:

$$\Theta^i = \sum_{j,k}\frac{1}{2}\widetilde{T}^i_{jk}\theta^j\wedge\theta^k, \quad \widetilde{T}^i_{jk} = -\widetilde{T}^i_{kj},$$
$$\Omega^i_j = \sum_{k,l}\frac{1}{2}\widetilde{R}^i_{jkl}\theta^k\wedge\theta^l, \quad \widetilde{R}^i_{jkl} = -\widetilde{R}^i_{jlk}.$$

这些函数与挠率 T 和曲率 Ω 的分量有如下关系. 令 $\sigma: U \to L(M)$ 是本节开头所定义的 U 上的截面, 那么

$$\sigma^*\widetilde{T}^i_{jk} = T^i_{jk}, \quad \sigma^*\widetilde{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl}.$$

这些公式可从命题 7.6 和下列各式立即得出：

$$
\begin{aligned}
\sigma^* d\theta^i &= -\sum_j \sigma^*\omega^i_j \wedge \sigma^*\theta^j + \sigma^*\Theta^i, \\
\sigma^* d\omega^i_j &= -\sum_k \sigma^*\omega^i_k \wedge \sigma^*\omega^k_j + \sigma^*\Omega^i_j, \\
\sigma^*\theta^i &= dx^i \quad 和 \quad \sigma^*\omega^i_j = \sum_k \Gamma^i_{kj} dx^k.
\end{aligned}
$$

命题 7.8 令 $x^i = x^i(t)$ 是 C^2 曲线 $\tau = x_t$ 的方程, 那么 τ 是测地线当且仅当

$$
\frac{d^2x^i}{dt^2} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0, \quad i = 1, \cdots, n.
$$

证明 沿 τ 的向量场 $\dot{x}_t$ 的分量由 dx^i/dt 给出. 从上面给出的 $\nabla_X Y$ 的分量公式看出, 若置 $X = \dot{x}_t$, 则 $\nabla_X X = 0$ 等价于上面的方程. 证毕.

我们将通过它们的分量来比较两个或多个线性联络.

命题 7.9 令 Γ 是 M 上以 Γ^i_{jk} 为分量的线性联络. 对于每个固定的 $t(0 \leqslant t \leqslant 1)$, 函数组 $\Gamma^{*i}_{jk} = t\Gamma^i_{jk} + (1-t)\Gamma^i_{kj}$ 定义一个线性联络 Γ^*, 并且它与 Γ 有相同的测地线. 特别, $\Gamma^{*i}_{jk} = \dfrac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj})$ 定义一个无挠线性联络.

证明 从命题 7.3、7.6、7.8 立即得出本命题. 证毕.

一般, 给定两个分别以 Γ^i_{jk} 和 Γ'^i_{jk} 为分量的线性联络 Γ 和 Γ'. 那么对于每个 $t(0 \leqslant t \leqslant 1)$, 函数组 $t\Gamma^i_{jk} + (1-t)\Gamma'^i_{jk}$ 都定义一个线性联络. 命题 7.8 蕴涵着若 $\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj} = \Gamma'^i_{jk} + \Gamma'^i_{kj}$, 则 Γ 和 Γ' 有相同的测地线.

从命题 7.2 即可得出下列命题.

命题 7.10 若 Γ^i_{jk} 和 Γ'^i_{jk} 分别是线性联络 Γ 和 Γ' 的分量, 那么 $S^i_{jk} = \Gamma'^i_{jk} - \Gamma^i_{jk}$ 是一个 (1,2) 型张量场的分量. 反之, 若 Γ^i_{jk} 是线性联络 Γ 的分量, 且 S^i_{jk} 是 (1,2) 型张量场 S 的分量. 那么 $\Gamma'^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + S^i_{jk}$ 定义一个线性联络 Γ. 用协变导数表示, 则它们的相互关系如下：对 M 上的任何向量场 X 和 Y,

$$
\nabla'_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y),
$$

其中 ∇ 和 ∇' 分别是关于 Γ 和 Γ' 的协变微分.

3.8 法 坐 标

本节不仅要证明指数映射的可微性, 还将证明法坐标系和凸坐标邻域的存在性.

令 M 是一个带线性联络 Γ 的流形. 给定 $X \in T_x(M)$. 令 $\tau = x_t$ 是以 (x, X) 为初始条件的测地线 (参看定理 6.3). 置

$$\exp tX = x_t.$$

正如我们在 3.6 节中已看到的那样, $\exp tX$ 在某个开区间 $-\varepsilon_1 < t < \varepsilon_2$ 内有定义, 其中 ε_1 和 ε_2 为正数. 如果联络是完备的, 那么对每个 $x \in M$, 指数映射 exp 在整个 $T_x(M)$ 上有定义. 一般对每个 $x \in M$, exp 仅在 $T_x(M)$ 的一个子集上有定义.

命题 8.1 将每个 $x \in M$ 与 x 点的零向量等同, 可将 M 看作 $T(M) = \bigcup_{x \in M} T_x(M)$ 的子流形. 那么 M 在 $T(M)$ 中有一个邻域 N 使得指数映射在 N 上有定义. 假如联络是 C^∞ 的, 那么指数映射 $N \to M$ 是 C^∞ 可微的.

证明 令 x_0 是 M 的任一点且 u_0 是使得 $\pi(u_0) = x_0$ 的 $L(M)$ 的一点. 对每个 $\xi \in \mathbf{R}^n$, 用 $B(\xi)$ 表示 $L(M)$ 上相应的标准水平向量场 (参看 3.2 节). 由第一章命题 1.5, 存在 u_0 的一个邻域 U^* 和一个正数 δ 使得局部单参数变换群 $\exp tB(\xi) : U^* \to L(M)$ 对 $|t| < \delta$ 有定义. 给定 $\mathbf{R}^n$ 的一个紧集 K, 我们可以对所有 $\xi \in K$ 同时选取 U^* 和 δ, 因为 $B(\xi)$ 可微地依赖于 ξ. 因此存在 u_0 的邻域 U^* 和 0 在 $\mathbf{R}^n$ 中的邻域 V 使得 $\exp tB(\xi) : U^* \to L(M)$ 对 $\xi \in V$ 和 $|t| \leqslant 1$ 有定义. 令 U 是 x_0 在 M 中的一个邻域而 σ 是 $L(M)$ 在 U 上的一个截面使得 $\sigma(x_0) = u_0$ 且 $\sigma(U) \subset U^*$. 给定 $x \in U$, 令 N_x 是使得 $\sigma(x)^{-1}X \in V$ 的 $X \in T_x(M)$ 的集合, 并且置 $N(x_0) = \bigcup_{x \in U} N_x$. 给定 $X \in N_x$, 置 $\xi = \sigma(x)^{-1}X$. 那么 $\pi((\exp tB(\xi)) \cdot \sigma(x))$ 是以 (x, X) 为初始条件的测地线, 因此

$$\exp X = \pi((\exp B(\xi)) \cdot \sigma(x)).$$

那么显然, $\exp : N(x_0) \to M$ 是 C^∞ 可微的. 最后置 $N = \bigcup_{x_0 \in M} N(x_0)$. 证毕.

命题 8.2 对每一点 $x \in M$, 在 $T_x(M)$ 中都有 x(更确切地说是 x 点的零向量) 的一个邻域 N_x, 它由指数映射可微地映射到 x 在 M 中的一个邻域 U_x 上.

证明 由指数映射的定义, 显然指数映射在 x 点的微分是非奇异的. 由隐函数定理, x 在 $T_x(M)$ 中有一个邻域 N_x 具有上述性质. 证毕.

在 x 点给定一个线性标架 $u = (X_1, \cdots, X_n)$, 那么线性同构 $u : \mathbf{R}^n \to T_x(M)$ 自然在 $T_x(M)$ 中定义一个坐标系. 所以微分同胚 $\exp : N_x \to U_x$ 自然在 U_x 中定义一个局部坐标系, 称之为由标架 u 决定的法坐标系.

命题 8.3 令 $x^1, \cdots, x^n$ 是由线性标架 $u = (X_1, \cdots, X_n)$ 在 $x \in M$ 点决定的法坐标系. 那么以 (x, X) 为初始条件 (其中 $X = \sum_i a^i X_i$) 的测地线 $\tau = x_t$ 可表示为

$$x^i = a^i t, \quad i = 1, \cdots, n.$$

反之, 具有上述性质的局部坐标系 $x^1,\cdots,x^n$ 必然是由 $u=(X_1,\cdots,X_n)$ 决定的法坐标系.

证明　第一个论断是法坐标系定义的直接推论. 第二个论断可以从"测地线是由初始条件 (x,X) 唯一决定的"这个事实得出.　证毕.

评注　在上面关于法坐标系的定义中, 我们没有指定使得坐标系在其中有效的邻域. 这是因为如果 $x^1,\cdots,x^n$ 是在 x 的邻域 U 中有效的法坐标系而 $y^1,\cdots,y^n$ 是在 x 的邻域 V 中有效的法坐标系并且两者都是由标架 $u=(X_1,\cdots,X_n)$ 决定的, 那么它们在 x 点的某个邻域上一致.

命题 8.4　在 M 上给定一个线性联络 Γ, 令 Γ^i_{jk} 是它关于以 x_0 为原点的法坐标系的分量. 那么在 x_0 点

$$\Gamma^i_{jk}+\Gamma^i_{kj}=0.$$

因而, 若 Γ 的挠率为零, 则在 x_0 点 $\Gamma^i_{jk}=0$.

证明　令 $x^1,\cdots,x^n$ 是以 x_0 为原点的法坐标系. 对于任何 $(a^1,\cdots,a^n)\in\mathbf{R}^n$, 由 $x^i=a^it\,(i=1,\cdots,n)$ 定义的曲线是一条测地线, 因此由命题 7.8, $\sum\limits_{j,k}\Gamma^i_{jk}(a^1t,\cdots,a^nt)a^ja^k=0$. 特别地,

$$\sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}(x_0)a^ja^k=0.$$

因为这对于每一个 $(a^1,\cdots,a^n)$ 都成立, 所以在 x_0 点 $\Gamma^i_{jk}+\Gamma^i_{kj}=0$. 如果挠率为零, 那么由命题 7.6, 在 x_0 点 $\Gamma^i_{jk}=0$.

证毕.

推论 8.5　令 K 是 M 上的一个张量场而且它关于以 x_0 为原点的法坐标系 $x^1,\cdots,x^n$ 的分量为 $K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$. 如果挠率为零, 那么在 x_0 点, 协变导数 $K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s;k}$ 与偏导数 $\partial K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}/\partial x^k$ 一致.

证明　从命题 8.4 和 3.7 节中用 Γ^j_{jk} 给出的 K 的协变微分公式立即得到本推论.　证毕.

推论 8.6　令 ω 是 M 上的任何微分形式. 若挠率为零, 那么对于 $\omega\in\mathfrak{D}^r(M)$.

$$d\omega=(-1)^rA(\nabla\omega),$$

其中 $\nabla\omega$ 是 ω 的协变微分, 并且 A 是第一章例 3.2 中定义的反对称化算子.

证明　令 x_0 是 M 的任一点且 $x^1,\cdots,x^n$ 是以 x_0 为原点的法坐标系. 由推论 8.5, 在 x_0 点 $d\omega=(-1)^rA(\nabla\omega)$ 对于 $\omega\in\mathfrak{D}^r(M)$ 成立.　证毕.

定理 8.7　令 $x^1,\cdots,x^n$ 是以 x_0 为原点一个法坐标系. 令 $U(x_0;\rho)$ 是由 $\sum\limits_i(x^i)^2<\rho^2$ 定义的 x_0 点的邻域. 那么就有一个正数 a 使得当 $0<\rho<a$ 时有

(1) $U(x_0;\rho)$ 按下列意义是凸的: $U(x_0;\rho)$ 中的任何两点均可用一条位于 $U(x_0;\rho)$ 中的测地线连接起来.

(2) $U(x_0;\rho)$ 的每一点都有一个包含 $U(x_0;\rho)$ 的法坐标邻域.

证明 由命题 7.9, 我们可以假设线性联络是无挠的.

引理 1 令 $S(x_0;\rho)$ 表示由 $\sum\limits_i (x^i)^2 = \rho^2$ 定义的球面. 那么存在一个正数 c 使得若 $0 < \rho < c$, 则在 $S(x_0,\rho)$ 的一点 y 处切于 $S(x_0,\rho)$ 的任何测地线在 y 的一个邻域中位于 $S(x_0,\rho)$ 的外侧.

引理 1 的证明 因为由假设, 挠率为零, 故由命题 8.4, 线性联络的分量 Γ^i_{jk} 在 x_0 点为零. 令 $x^i = x^i(t)$ 是在 $y = (x^1(0),\cdots,x^n(0))$ 点切于 $S(x_0,\rho)$ 的一条测地线 (后面 ρ 将受到限制). 置

$$F(t) = \sum_i (x^i(t))^2.$$

那么

$$F(0) = \rho^2,$$
$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_{t=0} = 2\sum_i x^i(0)\left(\frac{dx^i}{dt}\right)_{t=0} = 0,$$
$$\frac{d^2F}{dt^2} = 2\sum_j \left(\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 + x^i(t)\frac{d^2x^i}{dt^2}\right).$$

因而从命题 7.8 中所给出的测地线方程. 即可得出

$$\left(\frac{d^2F}{dt^2}\right)_{t=0} = 2\sum_{j,k}\left(\left(\delta_{jk} - \sum_i \Gamma^i_{jk}x^i\right)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right)_{t=0}.$$

因为 Γ^i_{jk} 在 x_0 点为零, 所以存在一个正数 c 使得以 $\left(\delta_{jk} - \sum\limits_i \Gamma^i_{jk}x^i\right)$ 为系数的二次型在 $U(x_0;c)$ 中是正定的. 若 $0 < \rho < c$, 则 $\left(\dfrac{d^2F}{dt^2}\right)_{t=0} > 0$ 从而当 $t \neq 0$ 在 0 点的邻域中时 $F(t) > \rho^2$. 这就完成了引理的证明. 证毕

引理 2 像在引理 1 中那样选取一个正数 c, 则存在一个正数 $a < c$ 使得

(1) $U(x_0;a)$ 中的任何两点均可用位于 $U(x_0;c)$ 中的一条测地线连接起来.

(2) $U(x_0;a)$ 的每一点都有一个包含 $U(x_0;a)$ 的法坐标邻域.

引理 2 的证明 可以自然地将 M 看作 $T(M)$ 的子流形. 对 $X \in T_x(M)$. 置

$$\varphi(X) = (x, \exp X).$$

若联络是完备的, 那么 φ 是从 $T(M)$ 到 $M \times M$ 的映射. 一般 φ 仅在 M 在 $T(M)$ 中的某个邻域上有定义. 因为 φ 在 x_0 点的微分是非奇异的, 所以有 x_0 在 $T(M)$ 中的一个邻域 V 和一个正数 $a < c$ 使得 $\varphi : V \to U(x_0; a) \times U(x_0; a)$ 是一个微分同胚. 若将 V 和 a 取得足够小, 那么可以假设对所有 $X \in V$ 和 $|t| \leqslant 1$ 都有 $\exp tX \in U(x_0; c)$. 为了验证条件 (1), 令 x 和 y 是 $U(x_0; a)$ 中的两点. 令 $X = \varphi^{-1}(x, y), X \in V$. 那么以 (x, X) 为初始条件的测地线可在 $U(x_0; c)$ 中将 x 和 y 连接起来. 为了验证 (2), 令 $V_x = V \cap T_x(M)$. 因为 $\exp : V_x \to U(x_0; a)$ 是微分同胚, 所以条件 (2) 被满足.

为完成定理 8.7 的证明, 令 $0 < \rho < a$; 令 x 和 y 是 $U(x_0; \rho)$ 中的任何点; 令 $x^i = x^i(t)(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是 $U(x_0; c)$ 中从 x 到 y 的一条测地线的方程 (参看引理 2). 我们将证明这条测地线在 $U(x_0; \rho)$ 中. 置

$$F(t) = \sum_i (x^i(t))^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

假设某个 $t, F(t) \geqslant \rho^2$(即对于某个 $t, x^i(t)$ 在 $U(x_0; \rho)$ 的外面). 令 $t_0(0 < t_0 < 1)$ 是使 $F(t)$ 达到最大值的 t 值. 那么

$$0 = \left(\frac{dF}{dt}\right)_{t=t_0} = 2 \sum_i x^i(t) \left(\frac{dx^i}{dt}\right)_{t=t_0}.$$

这就意味着测地线 $x^i(t)$ 在 $x^i(t_0)$ 点切于球面 $S(x_0; \rho_0)$, 其中 $\rho_0^2 = F(t_0)$. 由 t_0 的选取, 测地线 $x^i(t)$ 位于球面 $S(x_0; \rho_0)$ 的里面, 但这与引理 1 矛盾. 这证明 (1) 成立. (2) 从引理 2 的 (2) 得出. 证毕.

凸邻域的存在性归功于 J.H.C.Whitehead[1].

3.9 线性无穷小和乐群

令 Γ 是流形 M 上的线性联络. 对 $L(M)$ 的每一点 u, 都像第二章 2.10 节那样定义和乐群 $\Phi(u)$、局部和乐群 $\Phi^*(u)$ 以及无穷小和乐群 $\Phi'(u)$. 这些群均可看作 $T_x(M)(x = \pi(u))$ 上的线性变换群, 并且分别记为 $\Phi(x)$、$\Phi^*(x)$ 和 $\Phi'(x)$(参看第二章 2.4 节).

定理 9.1 和乐群 $\Phi(x)$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}(x)$ 是由形如 $(\tau R)(X, Y) = \tau^{-1} \circ R(\tau X, \tau Y) \circ \tau$ 的所有元素张成的 $T_x(M)$ 的线性自同态的子空间, 其中 $X, Y \in T_x(M)$ 且 τ 是沿着从 x 出发的任意分段可微曲线 τ 的平移.

证明 从第二章定理 8.1 以及 $L(M)$ 上的曲率形式 Ω 与曲率张量场 R 之间的关系 (参看第三章 3.5 节) 立即得出本定理. 证毕.

容易用 $\Phi(x)$ 和 $\Phi^*(x)$ 重新表述第二章的命题 10.1、定理 10.2 和定理 10.3. 因此我们将着手确定 $\Phi'(x)$ 的 Lie 代数.

定理 9.2 无穷小和乐群 $\Phi'(x)$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}'(x)$ 是由 $T_x(M)$ 的所有形如 $(\nabla^k R)(X,Y;V_1;\cdots;V_k)$ 的线性自同态张成的, 其中 $X,Y,V_1,\cdots,V_k \in T_x(M), 0 \leqslant k < \infty$.

证明 本定理的证明由下列两个引理来完成.

引理 1 将形如 $\nabla_{V_k}\cdots\nabla_{V_1}(R(X,Y))$(或 $(\nabla^k R)(X,Y;V_1;\cdots;V_k)$) 的 (1,1) 型张量场 (其中 $X,Y,V_1,\cdots,V_k$ 是 M 上的任意向量场) 称为 A_k 型 (或 B_k 型) 张量场. 那么每个 $A_k(B_k)$ 型张量场都是有限个 $B_j(A_j)(0 \leqslant j \leqslant k)$ 型张量场的 (以可微函数为系数的) 线性组合.

引理 1 的证明 用关于 k 的归纳法证明. $k=0$ 的情形是平凡的. 设 $\nabla_{V_{k-1}}\cdots\nabla_{V_1}(R(X,Y))$ 是下列形式的项之和

$$f(\nabla^j R)(U,V;W_1;\cdots;W_j), \quad 0 \leqslant j \leqslant k-1,$$

其中 f 是一个函数. 那么就有

$$\begin{aligned}\nabla_{V_k}(f(\nabla^j R)(U,V;W_1;\cdots;W_j)) = {} & (V_k f)\cdot(\nabla^j R)(U,V;W_1;\cdots;W_j) \\ & + (\nabla^{j+1}R)(U,V;W_1;\cdots,W_j;V_k) \\ & + (\nabla^j R)(\nabla_{V_k}U,V;W_1;\cdots,W_j) \\ & + (\nabla^j R)(U,\nabla_{V_k}V;W_1;\cdots;W_j) \\ & + \sum_{i=1}^{j}(\nabla^j R)(U,V;W_1;\cdots;\nabla_{V_k}W_i;\cdots;W_j).\end{aligned}$$

这说明每个 A_k 型张量场是 $B_j(0 \leqslant j \leqslant k)$ 型张量场的线性组合. 证毕

现在假设每个 B_{k-1} 型张量场是 $A_j(0 \leqslant j \leqslant k-1)$ 型张量场的线性组合, 则有

$$\begin{aligned}(\nabla^k R)(X,Y;V_1;\cdots;V_k) = {} & \nabla_{V_k}((\nabla^{k-1}R)(X,Y;V_1;\cdots;V_{k-1})) \\ & - (\nabla^{k-1}R)(\nabla_{V_k}X,Y;V_1;\cdots;V_{k-1}) \\ & - (\nabla^{k-1}R)(X,\nabla_{V_k}Y;V_1;\cdots;V_{k-1}) \\ & - \sum_{i=1}^{k-1}(\nabla^{k-1}R)(X,Y;V_1;\cdots;\nabla_{V_k}V_i;\cdots;V_{k-1}).\end{aligned}$$

右边第一项是 $A_j(0 \leqslant j \leqslant k)$ 型张量场的线性组合; 而右边的其余各项都是 $A_j(0 \leqslant j \leqslant k-1)$ 型张量场的线性组合. 这就完成了引理 1 的证明.

由定义, $\mathfrak{g}'(u)$ 是由所有形如 $(I_k)(k=0,1,2,\cdots)$ 的 $\mathfrak{gl}(n;\boldsymbol{R})$ 值函数在 u 点的值张成的 (参看第二章 2.10 节). 于是, 定理 9.2 就可从引理 1 和下列引理得出.

引理 2　若 $X, Y, V_1, \cdots, V_k$ 都是 M 上的向量场而且 $X^*, Y^*, V_1^*, \cdots, V_k^*$ 分别是它们在 $L(M)$ 中的水平提升. 那么对于 $Z \in T_x(M)$ 就有

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_{V_k} \cdots \nabla_{V_1}(R(X, Y)))_x Z \\
&\qquad = u \circ (V_k^* \cdots V_1^*(2\Omega(X^*, Y^*)))_u \circ u^{-1}(Z).
\end{aligned}
$$

引理 2 的证明　只要将 $R(X, Y)$ 和 $2\Omega(X^*, Y^*)$ 取作第三章命题 1.3 中的 φ 和 f, 立即就可得出本引理.　证毕.

由第二章的定理 10.8 和 (本章的) 定理 9.2, 一个实解析联络的限制和乐群 $\Phi^0(x)$ 完全是由各阶协变微分 $\nabla^k R (k = 0, 1, 2, \cdots)$ 在 x 点的值决定的.

本节的结果是由 Nijenhuis[2] 得到的.

第四章 Riemann 联络

4.1 Riemann 度量

令 M 是一个 n 维仿紧流形. 我们已经知道 (参看第一章的例 5.5 和 5.7 以及第三章的命题 1.4), M 允许有 Riemann 度量并且在 M 上的 Riemann 度量的集合与从线性标架丛 $L(M)$ 到规范正交标架丛 $O(M)$ 的约化的集合之间有一个一一对应. 每个 Riemann 度量 g 在每个切空间 $T_x(M)$ 中定义一个正定内积, 记作 $g_x(X,Y)$ 或者简记为 $g(X,Y), X,Y \in T_x(M)$(参看第一章的例 3.1).

例 1.1 $\mathbf{R}^n$ 上关于自然坐标系 $x^1,\cdots,x^n$ 的 Euclid 度量定义为

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\delta_{ij}\quad (\text{Kronecker符号}).$$

例 1.2 令 $f:N\to M$ 是流行 N 到带有度量 g 的 Riemann 流形 M 的浸入. N 上的诱导 Riemann 度量 h 定义为 $h(X,Y)=g(f_*x,f_*y), X,Y\in T_x(N)$.

例 1.3 令 G 是一个 Lie 群且 H 为一个紧子群, 则齐性空间 G/H 允许有不变度量. 令 $\tilde{H}$ 是 G/H 的原点 0(即由陪集 H 代表的点) 处的线性迷向群, 那么 $\tilde{H}$ 是切空间 $T_0(G/H)$ 的线性变换群, 每个变换都是由 H 的一个元素诱导的并使 0 点成为不动点. 因为 H 是紧的, 所以 $\tilde{H}$ 也是紧的而且在 $T_0(G/H)$ 中有一个经 $\tilde{H}$ 作用不变的正定内积, 记为 g_0. 对每个 $x\in G/H$, 取一个元素 $a\in G$ 使得 $a(0)=x$ 并且用 $g_x(X,Y)=g_0(a^{-1}X,a^{-1}Y)(X,Y\in T_x(G/H))$ 在 $T_x(G/H)$ 中定义一个内积 g_x. 容易验证 g_x 不依赖于使得 $a(0)=x$ 的 $a\in G$ 的选取并且容易验证这样得到的 Riemann 度量 g 是在 G 作用下不变的. 装备了不变 Riemann 度量的齐性空间 G/H 称为 Riemann 齐性空间.

例 1.4 每个紧 Lie 群 G 允许有在左、右平移之下都不变的 Riemann 度量. 实际上, 群 $G\times G$ 通过对 $(a,b)\in G\times G, x\in G$ 使 $(a,b)\cdot x=axb^{-1}$ 可迁的作用于 G 上. 在 G 的单位元 e 处, $G\times G$ 的迷向子群是对角线 $D=\{(a,a);a\in G\}$, 因而 $G=(G\times G)/D$. 由例 1.3, G 允许有经 $G\times G$ 作用不变的 Riemann 度量, 从而证明了上述论断. 如果 G 是紧的和半单的, 那么 G 允许有下述的标准不变 Riemann 度量. 在与切空间 $T_e(G)$ 等同的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 中有 Killing-Cartan 形式 $\varphi(X,Y)=\operatorname{tr}(\operatorname{ad}X\circ\operatorname{ad}Y)$, 其中 $X,Y\in\mathfrak{g}=T_e(G)$. 形式 φ 是双线性的、对称的并且是在 $\operatorname{ad}G$ 作用下不变的. 若 G 是紧的和半单的, 则 φ 为负定的. 在 $T_e(G)$ 中用 $g_e(X,Y)=-\varphi(X,Y)$ 定义一个正定内积 g_e. 因为 φ 是经 $\operatorname{ad}G$ 作用不变的, 所以 g_e

是在对角线群 D 的作用下不变的. 由例 1.3, 在 G 上得到一个经 $G\times G$ 作用不变的 Riemann 度量. 我们将在第二卷中详细讨论这个度量.

我们将总是用"Riemann 度量"一词来表示一个正定的、对称的二阶协变张量场, 并且用"不定 Riemann 度量"这一术语表示在每一点 $x\in M$ 为非退化的二阶对称协变张量场 g, 即 $g(X,Y)=0$ 对所有 $Y\in T_x(M)$ 成立就蕴涵着 $X=0$.

例 1.5 $\mathbf{R}^n$ 上关于坐标系 $x^1,\cdots x^n$ 的不定 Riemann 度量可由下式给出:

$$\sum_{i=1}^{p}(\mathrm{d}x^i)^2-\sum_{j=p+1}^{n}(\mathrm{d}x^j)^2,$$

其中 $0\leqslant p\leqslant n-1$. 不定 Riemann 度量的另一个例子是如下定义的非紧半单 Lie 群 G 上的标准度量. 已知对于这种群, Killing-Cartan 形式 φ 是不定的和非退化的. 例 1.4 中的构造在 G 上给出一个经左、右平移都不变的不定 Riemann 度量.

令 M 是一个带 Riemann 度量或不定 Riemann 度量 g 的流形. 对于每个 x, 内积 g_x 定义从 $T_x(M)$ 到其对偶空间 $T_x^*(M)$(x 点的余切空间) 的一个线性同构 ψ 如下: 对每个 $X\in T_x(M)$ 指派由

$$\langle Y,\alpha\rangle=g_x(X,Y),\quad 对所有Y\in T_x(M)$$

定义的余切向量 $\alpha\in T_x^*(M)$. $T_x(M)$ 中的内积通过同构 ψ 在对偶空间 $T_x^*(M)$ 中定义一个内积 (仍然记为 g_x):

$$g_x(\alpha,\beta)=g_x(\psi^{-1}(\alpha),\psi^{-1}(\beta)),\quad \alpha,\beta\in T_x^*(M).$$

令 $x^1,\cdots,x^n$ 是 M 的局部坐标系. g 关于 $x^1,\cdots,x^n$ 的分量 g_{ij} 由下式给出:

$$g_{ij}=g(\partial/\partial x^i,\partial/\partial x^j),\quad i,j=1,\cdots,n.$$

g 的逆变分量 g^{ij} 定义为

$$g^{ij}=g(dx^i,dx^j),\quad i,j=1,\cdots,n.$$

那么就有

$$\sum_j g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k.$$

事实上, 用 $\psi(\partial/\partial x^i)=\sum\limits_j\psi_{ij}dx^j$ 定义 ψ_{ij}, 则有

$$g_{ij}=g(\partial/\partial x^i,\partial/\partial x^j)=\langle\partial/\partial x^j,\psi(\partial/\partial x^i)\rangle=\psi_{ij}.$$

另一方面又有

$$\delta_i^k = \langle \partial/\partial x^i, dx^k \rangle = g(dx^k, \psi(\partial/\partial x^i)) = g(dx^k, \sum_j \psi_{ij} dx^j)$$

$$= \sum_j \psi_{ij} g^{jk},$$

这样便证明了上述论断.

如果 ξ^i 是一个向量或向量场 X 关于 $x^1, \cdots, x^n$ 的分量, 即 $X = \sum_i \xi^i(\partial/\partial x^i)$, 那么对应余切向量或对应 1 形式 $\alpha = \psi(X)$ 的分量 ξ_i 与 ξ^i 的关系如下:

$$\xi^i = \sum_j g^{ij} \xi_j, \quad \xi_i = \sum_j g_{ij} \xi^j.$$

对于每个 (r, s) 型数对, 都能在 x 点将 $T_x(M)$ 和 $T_x^*(M)$ 的内积 g 扩张成张量空间$\mathbf{T}_s^r(x)$ 的内积, 仍记为 g. 如果 K 和 L 是 x 点的分别以 $K_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r}$ 和 $L_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r}$ 为(关于 $x^1, \cdots, x^n$ 的) 分量的 (r, s) 型张量, 那么

$$g(K, L) = \sum g_{i_1 k_1} \cdots g_{i_r k_r} \; g^{j_1 l_1} \cdots g^{j_s l_s} \; K_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} \; L_{l_1 \cdots l_s}^{k_1 \cdots k_r}.$$

也可将同构 $\psi : T_x(M) \to T_x^*(M)$ 扩张到张量的情况. 给定一个以 $K_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r}$ 为分量的张量 $K \in \mathbf{T}_s^r(x)$, 就可得到一个以

$$K'^{i_1 \cdots i_{r-1}}_{j_1 \cdots j_{s+1}} = \sum_k g_{j_1 k} \; K^{k i_1 \cdots i_{r-1}}_{j_2 \cdots j_{s+1}}$$

为分量的张量 $K' \in \mathbf{T}_{s+1}^{r-1}(x)$, 或者以

$$K''^{i_1 \cdots i_{r+1}}_{j_1 \cdots j_{s-1}} = \sum_k g^{i_1 k} \; K^{i_2 \cdots i_{r+1}}_{k j_1 \cdots j_{s-1}}$$

为分量的张量 $K'' \in \mathbf{T}_{s-1}^{r+1}(x)$.

例 1.6 令 A 和 B 是切空间 $T_x(M)$ 的斜对称自同态, 即 x 点的 (1,1) 型张量且使得对于 $X, Y \in T_x(M)$,

$$g(AX, Y) = -g(AY, X), \quad g(BX, Y) = -g(BY, X).$$

那么内积 $g(A, B) = -\mathrm{tr}(AB)$. 实际上, 在 x 点取一个局部坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 使得 $g_{ij} = \delta_{ij}$ 并且令 a_j^i 和 b_j^i 分别是 A 和 B 的分量. 那么

$$g(A, B) = \sum g_{ik} \; g^{jl} \; a_j^i \; b_l^k = \sum a_j^i \; b_j^i = -\sum a_j^i \; b_i^j = -\mathrm{tr}(AB),$$

因为 B 是斜对称的, 即 $b^i_j = -b^j_i$.

在 Riemann 流形 M 上, G^1 可微曲线 $\tau = x_t (a \leqslant t \leqslant b)$ 的弧长定义为

$$L = \int_a^b g(\dot{x}_t, \dot{x}_t)^{\frac{1}{2}} dt.$$

用局部坐标系 $x^1, \cdots, x^n$, 那么 L 由下式给出

$$L = \int_a^b \left(\sum_{i \cdot j} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

这个定义显然可以推广到分段 C^1 可微曲线的情况.

在连通流形 M 上给定了一个 Riemann 度量 g, 我们定义 M 上的距离函数 $d(x, y)$ 如下. 由定义, 两点 x 和 y 之间的距离 $d(x, y)$ 是所有连接 x 和 y 的分段 C^1 可微曲线的长度的下确界. 那么

$$d(x, y) \geqslant 0, \quad d(x, y) = d(y, x), \quad d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z).$$

以后 (在 4.3 节中) 我们将会看到仅当 $x = y$ 时 $d(x, y) = 0$ 而且由距离函数 (度量)d 定义的拓扑与 M 的流形拓扑相同.

4.2 Riemann 联络

虽然本节的结果对带有不定 Riemann 度量的流形也有效, 但是为了简单起见, 我们将只考虑 (正定)Riemann 度量.

令 M 是带度量 g 的一个 n 维 Riemann 流形且 $O(M)$ 是 M 上的规范正交标架丛. 根据第二章命题 6.1, $O(M)$ 的每一个联络决定线性标架丛 $L(M)$ 的一个联络, 即 M 的一个线性联络. 像这样由 $O(M)$ 上的联络决定的 M 的线性联络称为度量联络.

命题 2.1 带度量 g 的 Riemann 流形 M 上的线性联络 Γ 是度量联络当且仅当 g 关于 Γ 是平行的.

证明 因为 g 是切丛 $T(M)$ 上的纤维度量 (参看第三章 3.1 节), 所以本命题立即从第三章命题 1.5 得出. 证毕.

在所有可能的度量联络中, 最重要的是由下列定理给出的 Riemann 联络 (有时称为 Levi-Civita 联络).

定理 2.2 每个 Riemann 流形允许有唯一的无挠度量联络.

在这里我们将给出两个证明, 一个是用丛 $O(M)$, 另一个是用协变微分.

证明 (A) 唯一性. 令 θ 是 $L(M)$ 的限制在 $O(M)$ 上的标准形式. 令 ω 是 $O(M)$ 上的一个联络形式, 它定义 M 的一个度量联络. 在$\mathbf{R}^n$ 的基 $e_1, \cdots, e_n$ 和 Lie

代数 $\mathfrak{o}(n)$ 的基 $E_i^j(i<j,i,j=1,\cdots,n)$ 下, 可以分别用 n 个形式 $\theta^i(i=1,\cdots,n)$ 和微分形式 ω^i 的斜对称矩阵表示 θ 和 ω. 下列引理的证明与第三章命题 2.6 的证明类似, 因此将它留给读者.

引理 n 个形式 $\theta^i(i=1,\cdots,n)$ 和 $\dfrac{1}{2}n(n-1)$ 个形式 $\omega_k^j(1\leqslant j<k\leqslant n)$ 定义 $O(M)$ 上的绝对平行性.

令 φ 是定义 M 的另一个度量联络的联络形式. 那么由引理, $\varphi-\omega$ 能用 θ^i 和 ω_k^j 表示. 因为 $\varphi-\omega$ 可零化垂直向量，所以有

$$\varphi_j^i-\omega_j^i=\sum_k F_{jk}^i\theta^k,$$

其中各 F_{jk}^i 都是 $O(M)$ 上的函数. 设由 ω 和 φ 定义的联络是无挠的. 那么从第三章定理 2.4 的第一个结构方程得到

$$0=\sum_j(\varphi_j^i-\omega_j^i)\wedge\theta^j=\sum_{j,k}F_{jk}^i\theta^k\wedge\theta^j.$$

这就蕴涵着 $F_{jk}^i=F_{kj}^i$. 另一方面又有 $F_{jk}^i=-F_{kj}^i$, 这是由于 (ω_j^i) 和 (φ_j^i) 都是斜对称的. 由此可知 $F_{jk}^i=0$, 从而证明了唯一性.

存在性. 令 φ 是 $O(M)$ 上的任意一个度量联络形式而 Θ 是它在 $O(M)$ 上的挠率形式. 写成

$$\Theta^i=\frac{1}{2}\sum_{j\cdot k}\tilde{T}_{jk}^i\theta^j\wedge\theta^k,\quad \tilde{T}_{jk}^i=-\tilde{T}_{kj}^i,$$

并且置

$$\begin{aligned}\tau_j^i=&\sum_k\frac{1}{2}(\tilde{T}_{jk}^i+\tilde{T}_{ki}^j+\tilde{T}_{ji}^k)\theta^k,\\ \omega_j^i=&\varphi_j^i+\tau_j^i.\end{aligned}$$

我们将证明 $\omega=(\omega_j^i)$ 定义所期望的联络. 因为 $(\tilde{T}_{jk}^i+\tilde{T}_{ki}^j)$ 和 $\tilde{T}_{ji}^k$ 对 i 和 j 都是斜对称的, 所以 τ_j^i 也是斜对称的. 从而 ω 是 $\mathfrak{o}(n)$ 值的. 因为 θ 零化垂直向量, 因而 $\tau=(\tau_j^i)$ 也零化垂直向量. 容易证明对每个 $a\in O(n)$, $R_a^*\tau=\mathrm{ad}(a^{-1})(\tau)$. 因此 ω 是一个联络形式. 最后验证由 ω 定义的度量联络是无挠的. 因为 $(\tilde{T}_{ji}^k+\tilde{T}_{ki}^j)$ 对于 j 和 k 是对称的, 所以有

$$\sum_j\tau_j^i\wedge\theta^j=-\Theta^i,$$

因此

$$d\theta^i=-\sum_j\varphi_j^i\wedge\theta^j+\Theta^i=-\sum_j\omega_j^i\wedge\theta^j,$$

从而证明了上述论断.

证明 (B) 存在性. 给定 M 上的向量场 X 和 Y, 用下列等式定义 $\nabla_X Y$:

$$
\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) =& X \cdot g(Y, Z) + Y \cdot g(X, Z) - Z \cdot g(X, Y) \\
&+ g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y]),
\end{aligned}
$$

此式应当对 M 上的一切向量场 Z 成立. 可以直接验证映射 $(X, Y) \to \nabla_X Y$ 满足第三章命题 2.8 的四个条件, 因而由第三章命题 7.5, 该映射决定 M 的一个线性联络 Γ. Γ 为无挠的事实可从上面 $\nabla_X Y$ 的定义和第三章定理 5.1 中给出的公式 $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ 而得出. 为证明 Γ 是一个度量联络, 即 $\nabla g = 0$(参看命题 2.1), 根据第三章命题 2.10, 只需证明对所有向量场 X, Y, Z 都有下式成立:

$$
X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).
$$

但这从 $\nabla_X Y$ 的定义立即得出.

唯一性. 可以直接验证: 若 $\nabla_X Y$ 满足 $\nabla_X g = 0$ 和 $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$, 则它满足定义 $\nabla_X Y$ 的等式. 证毕.

在证明的过程中我们还得到了下列命题.

命题 2.3 对于 Riemann 联络, 下列等式对 M 上的所有向量场 X, Y, Z 成立:

$$
\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) =& X \cdot g(Y, Z) + Y \cdot g(X, Z) - Z \cdot g(X, Y) \\
&+ g([X.Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y]).
\end{aligned}
$$

推论 2.4 利用局部坐标系表示, Riemann 联络的分量 Γ^i_{jk} 由下式给出:

$$
\sum_l g_{lk} \Gamma^l_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}\right).
$$

证明 在命题 2.3 中, 令 $X = \partial/\partial x^j$, $Y = \partial/\partial x^i$, $Z = \partial/\partial x^k$ 并且利用第三章命题 7.4. 证毕.

令 M 和 M' 分别是带有 Riemann 度量 g 和 g' 的 Riemann 流形. 如果映射 $f: M \to M'$ 在 x 点对所有 $X, Y \in T_x(M)$ 都有 $f(X, Y) = g'(f_*X, f_*Y)$ 成立, 则称映射 f 在 x 点是等距的. 在这种情况下, f_* 在 x 点是内射, 因为 $f_*X = 0$ 蕴涵着 $g(X, Y) = 0$ 对所有 Y 成立, 因此 $X = 0$. 因而在 M 的每一点都是等距的映射 f 是一个浸入, 称为等距浸入. 此外若 f 还是一一的, 则称之为 M 到 M' 中的等距嵌入. 如果 f 将 M 一一地映射到 M' 上, 则将 f 称为从 M 到 M' 上的等距 (映射).

命题 2.5 如果 f 是从 Riemann 流形 M 到另一个 Riemann 流形 M' 的等距映射, 那么 f 的微分与平移可交换. 更确切地说, 若 τ 是 M 上从 x 到 y 的一条曲线, 则下列图表可交换:

$$\begin{array}{ccc} T_x(M) & \xrightarrow{\tau} & T_y(M) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ T_{x'}(M') & \xrightarrow{\tau'} & T_{y'}(M') \end{array}$$

其中 $x' = f(x)$, $y' = f(y)$, $\tau' = f(\tau)$.

证明 这是定理 2.2 中 Riemann 联络唯一性的推论. 作为 M 和 M' 之间的微分同胚, f 在 M 上向量场的集合与 M' 上向量场的集合之间定义一个一一对应. 从 M' 上的 Riemann 联络 Γ', 通过 $\nabla_X Y = f^{-1}(\nabla_{fX}(fY))$ 可以得到 M 上的一个线性联络 Γ, 其中 X 和 Y 是 M 上的向量场. 容易验证 Γ 是无挠的而且是关于 g 的度量. 因而 Γ 是 M 上的 Riemann 联络. 这意味着关于 M 和 M' 的 Riemann 联络, $f(\nabla_X Y) = \nabla_{fX}(fY)$. 这立即蕴涵着本命题成立. 证毕.

命题 2.6 如果 f 是 Riemann 流形 M 到另一个 Riemann 流形 M' 的等距浸入而且 $f(M)$ 在 M' 中是开的, 那么 f 的微分与平移交换.

证明 因为 $f(M)$ 在 M' 中是开的, 所以 $\dim M = \dim M'$. 由于 f 是浸入, 所以 M 的每一点 x 都有一个开邻域 U 使得 $f(U)$ 在 M' 中是开的而且 $f: U \to f(U)$ 是微分同胚. 因而 f 是从 U 到 $f(U)$ 上的等距. 由命题 2.5, f 的微分与沿 U 中任何曲线的平移交换. 在 M 中任意给定一条从 x 到 y 的曲线 τ, 都能在 M 中找出有限个具有上述性质的开邻域覆盖 τ. 由此可知 f 的微分与沿 τ 的平移交换. 证毕.

评注 由此可知, 在命题 2.6 的假设条件下, M 的每条测地线均被 f 映射成 M' 中的测地线.

例 2.1 令 M 是一个带度量 g 的 Riemann 流形. 令 M^* 是 M 关于射影 p 的覆盖流形. 可以按照使 $p: M^* \to M$ 成为一个等距浸入的方式在 M^* 上引入一个 Riemann 度量 g^*. M^* 的每条测地线均投影到 M 的某条测地线上. 反过来, 在 M 中给定一条从 x 到 y 的测线 τ 和 M^* 的一个适合 $p(x^*) = x$ 的点 x^*, 那么在 M^* 中有唯一的一条从 x^* 出发的曲线 τ^* 使得 $p(\tau^*) = \tau$. 因为 p 是局部等距, 所以 τ^* 是 M^* 的测地线. 由命题 2.6 及类似的论证可以证明, 若 $p(x^*) = x$, 则 M^* 关于基点 x^* 的限制线性和乐群在 p 下同构于 M 关于基点 x 的限制线性和乐群.

命题 2.5 和命题 2.6 也可对作为特殊线性联络的 Riemann 联络来叙述. 类似的说法对相应的仿射联络也成立. 例 2.1 中关于线性和乐群的陈述对仿射和乐群同样成立.

4.3 法坐标和凸邻域

令 M 是带度量 g 的一个 Riemann 流形. 向量 X 的长度, 即 $g(X,X)^{\frac{1}{2}}$, 记为 $\| X \|$.

令 $\tau = x_t$ 是 M 中的一条测地线. 因为切向量 $\dot{x}_t$ 沿 τ 是平行的, 又因为平移是等距变换, 所以 $\dot{x}_t$ 的长度沿 τ 为常数. 若 $\| \dot{x}_t \| = 1$, 则将 t 称为测地线 τ 的标准参数.

我们总是用"Riemann 流形 M 在 x 点的法坐标系"这个术语表示 x 点的一个法坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 并且使得 $\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^n$ 构成 x 点的规范正交标架. 然而在其他点上 $\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^n$ 可能不是规范正交的.

令 U 是 x 点的一个法坐标邻域并且在 x 点的法坐标系为 $x^1, \cdots, x^n$. 定义 $O(M)$ 在 U 上的一个截面 σ 如下：令 u 是由 $(\partial/\partial x^1)_x, \cdots, (\partial/\partial x^n)_x$ 给出的 x 点的规范正交标架. 通过 u 沿着过 x 点的测地线平移, 就可在 U 的每一点处都配置一个规范正交标架. 对于研究 Riemann 流形而言, 这样定义的截面 $\sigma: U \to O(M)$ 比由 $\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^n$ 给出的截面 $U \to L(M)$ 更有用. 令 $\theta = (\theta^i)$ 和 $\omega = (\omega^i_j)$ 分别是 $O(M)$ 上的标准形式和 Riemann 联络形式. 置

$$\bar{\theta} = \sigma^*\theta = (\bar{\theta}^i), \quad \bar{\omega} = \sigma^*\omega = (\bar{\omega}^j_k),$$

其中 $\bar{\theta}^i$ 和 $\bar{\omega}^j_k$ 都是 U 上的 1 形式. 为了明确计算这些形式, 通过

$$x^i = p^i t, \quad i = 1, \cdots, n; \quad \sum_i (p^i)^2 = 1,$$

引入极坐标系 $(p^1, \cdots, p^n; t)$. 那么 $\bar{\theta}^i$ 和 $\bar{\omega}^j_k$ 都是以 $p^1, \cdots, p^n, t$ 的函数为系数的 $dp^1, \cdots, dp^n$ 及 dt 的线性组合.

命题 3.1 (1) $\bar{\theta}^i = p^i dt + \varphi^i$, 其中 $\varphi^i (i = 1, \cdots, n)$ 不包含 dt;

(2) $\bar{\omega}^j_k$ 不包含 dt;

(3) 在 $t = 0$(即在原点 x), $\varphi^i = 0$ 且 $\bar{\omega}^j_k = 0$;

(4)
$$d\varphi^i = -(dp^i + \sum_j \bar{\omega}^i_j p^i) \wedge dt + \cdots,$$

$$d\bar{\omega}^i_j = -\sum_{k,l} R^i_{jkl} p^k \varphi^l \wedge dt + \cdots,$$

其中省略号 $\cdots$ 表示不包含 dt 的项而 $\bar{R}^i_{jkl}$ 为曲率张量场关于标架场 σ 的分量.

证明 (1) 对于固定的方向 $(p^1, \cdots, p^n)$, 令 $\tau = x_t$ 是由 $x^i = p^i t (i = 1, \cdots, n)$ 定义的测地线. 置 $u_t = \sigma(x_t)$. 为了证明 $\theta^i - p^i dt$ 不包含 dt, 只需证明 $\bar{\theta}(\dot{x}_t) = p^i$.

从标准形式 θ 的定义有

$$\theta(\dot{u}_t) = \bar{\theta}(\dot{x}_t) = u_t^{-1}(\dot{x}_t).$$

因为 u_t 和 $\dot{x}_t$ 都是沿 τ 平行的, 所以 $\bar{\theta}(\dot{x}_t)$ 不依赖于 t. 另一方面又有 $\bar{\theta}^i(\dot{x}_0) = p^i$. 从而 $\bar{\theta}^i(\dot{x}_t) = p^i$ 对所有 t 成立.

(2) 因为由 σ 的构造, u_t 是水平的, 所以

$$\bar{\omega}_k^j(\dot{x}_t) = \omega_k^j(\dot{u}_t) = 0.$$

这就意味着 $\bar{\omega}_k^j$ 不包含 dt.

(3) 在 x 点 (即 $t=0$ 的点) 给定任何单位向量 X, 令 $\tau = x_t$ 是满足初始条件 (x, X) 的测地线, 因而 $X = \dot{x}_0$. 由 (1) 和 (2) 就有 $\varphi^i(\dot{x}_0) = 0$ 和 $\bar{\omega}_k^j(\dot{x}_0) = 0$.

(4) 从结构方程得到

$$d(p^i dt + \varphi^i) = -\sum_j \bar{\omega}_j^i \wedge (p^j dt + \varphi^j),$$

$$d\bar{\omega}_j^i = -\sum_k \bar{\omega}_k^i \wedge \bar{\omega}_j^k + \bar{\Omega}_j^i$$

其中

$$\bar{\omega}_j^i = \sum_{k,l} \frac{1}{2} \bar{R}_{jkl}^i \bar{\theta}^k \wedge \bar{\theta}^l = \sum_{k,l} \frac{1}{2} \bar{R}_{jkl}^i (p^k dt + \varphi^k) \wedge (p^l dt + \varphi^l)$$

(参看第三章 4.7 节) 从而 (4) 成立. 证毕.

利用 dt 和 φ^i, 则可将度量张量 g 表为下列形式 (参考第一章例 3.1 中所讲的 g 的经典表达式 $ds^2 = \sum g_{ij} dx^i dx^j$).

命题 3.2 度量张量 g 可以表示成

$$ds^2 = (dt)^2 + \sum_i (\varphi^i)^2.$$

证明 因为对每个 $X \in T_y(M) (y \in U)$, $\bar{\theta}(X) = (\sigma(y))^{-1}(X)$, 又因为 $\sigma(y)$ 是从$\mathbf{R}^n$ 到 $T_y(M)$ 的等距映射, 所以有

$$g(X, Y) = \sum_i \bar{\theta}^i(X) \bar{\theta}^i(Y), \quad X, Y \in T_y(M),\ y \in U.$$

换句话说,

$$ds^2 = \sum_i (\bar{\theta}^i)^2.$$

由命题 3.1 得

$$ds^2 = (dt)^2 + \sum_i (\varphi^i)^2 + 2 \sum_i p^i \varphi^i dt.$$

因为由命题 3.1, 在 $t=0$ 点 $\varphi^i=0$, 因而可以通过证明 $\sum\limits_i p^i\varphi^i$ 不依赖于 t 来证明 $\sum\limits_i p^i\varphi^i=0$. 因为由命题 3.1, $\sum\limits_i p^i\varphi^i$ 确实不包含 dt, 所以只要证明 $d(\sum\limits_i p^i\varphi^i)$ 的确不包含 dt 就行了. 由命题 3.1 得

$$d(\sum_i p^i\varphi^i) = -\sum_i p^i(dp^i + \sum_j \bar{\omega}^i_j p^j) \wedge dt + \cdots,$$

其中省略号表示不包含 dt 的项.

从 $\sum\limits_i (p^i)^2 = 1$ 得到

$$0 = d(\sum_i (p^i)^2) = 2\sum_i p^i dp^i.$$

另一方面, 由于 $(\bar{\omega}^i_j)$ 是斜对称的, 所以

$$\sum_{i\cdot j} p^i \bar{\omega}^i_j p^j = 0.$$

这证明 $d(\sum\limits_i p^i\varphi^i)$ 确实不包含 dt. 证毕.

从命题 3.2 又得到

命题 3.3 令 $x^1,\cdots,x^n$ 是 x 点的法坐标系. 那么每一条经过 x 的测地线 $\tau = x_t$, $x^i = a^i t (i=1,\cdots,n)$ 都垂直于由 $\sum\limits_i (x^i)^2 = r^2$ 定义的球面 $S(x,r)$.

对于每个小正数 r, 置

$$N(x;r) = T_x(M)\text{中由} \parallel X \parallel < r\text{定义的}0\text{点的邻域},$$
$$U(x;r) = M\text{中由}\sum_i (x^i)^2 < r^2\text{定义的}x\text{点的邻域}.$$

由法坐标系的定义, 指数映射是从 $N(x;r)$ 到 $U(x;r)$ 的微分同胚.

命题 3.4 令 r 是一个正数使得

$$\exp: N(x;r) \to U(x;r)$$

是一个微分同胚. 那么就有

(1) $U(x;r)$ 中的每一点 y 都能用 $U(x;r)$ 中的测地线连接到 (坐标系的原点)x, 而且这样的测地线是唯一的;

(2) (1) 中所述测地线的长度等于距离 $d(x,y)$;

(3) $U(x;r)$ 是使得 $d(x,y) < r$ 的点 $y \in M$ 的集合.

证明 指数映射把 $N(x;r)$ 中过原点的每一条直线映射成 $U(x;r)$ 中过 x 点的测地线, 而且反过来 $U(x;r)$ 中过 x 点的每条测地线都是 $N(x;r)$ 中过 0 点的直线在指数映射下的象. 于是 (1) 可从 $\exp: N(x;r) \to U(x;r)$ 是微分同胚的事实得出. 为了证明 (2), 令 $(a^1, \cdots, a^n; b)$ 是 y 关于在本节开头引进的极坐标系 $(p^1, \cdots, p^n, t)$ 的坐标. 令 $\tau = x_s(\alpha \leqslant s \leqslant \beta)$ 是从 x 到 y 的任何分段可微曲线. 我们将证明 τ 的长度大于或等于 b. 令曲线 τ 的方程为

$$p^1 = p^1(s), \cdots, p^n = p^n(s), \quad t = t(s), \quad \alpha \leqslant s \leqslant \beta.$$

如果用 $L(\tau)$ 表示 τ 的长度, 那么命题 3.2 蕴涵下列不等式:

$$L(a) \geqslant \int_\alpha^\beta \left|\frac{dt}{ds}\right| ds \geqslant \int_a^b dt = b.$$

现在再来证明 (3). 若 y 在 $U(x;r)$ 中, 则显然 $d(x,y) < r$. 反过来, 令 $d(x,y) < r$, 再令 τ 是一条从 x 到 y 的曲线并且使得 $L(\tau) < r$. 假设 τ 不在 $U(x;r)$ 中. 令 y' 是 τ 上属于 $U(x;r)$ 的闭包但不属于 $U(x;r)$ 的第一个点. 那么由 (1) 和 (2), $d(x,y') = r$. τ 从 x 到 y' 的长度至少是 r. 因此 $L(\tau) \geqslant r$, 而这导致矛盾. 所以 τ 整个地在 $U(x;r)$ 中, 从而 y 在 $U(x;r)$ 中. 证毕.

命题 3.5 $d(x,y)$ 是 M 上的距离函数 (即度量) 而且由它所定义的拓扑与 M 的流形拓扑相同.

证明 正如我们早已指出的那样 (参看 4.1 节的末尾),

$$d(x,y) \geqslant 0, \quad d(x,y) = d(y,x), \quad d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z).$$

从命题 3.4 可知, 若 $x \neq y$, 那么 $d(x,y) > 0$. 因而 d 是一个度量. 第二个论断可从命题 3.4 的 (3) 得出. 证毕.

如果连接 Riemann 流形 M 的两点 x 和 y 的测地线的长度等于距离 $d(x,y)$. 则称该测地线为极小的. 现在着手按下列方式证明在 Riemann 流形的每一点处都存在凸邻域.

定理 3.6 令 $x^1, \cdots, x^n$ 是 Riemann 流形 M 在 x 点的法坐标系. 存在一个正数 a 使得若 $0 < \rho < a$, 那么

(1) $U(x;\rho)$ 中的任何两点都能用唯一的极小测地线连接起来, 而且它是连接这两点并且位于 $U(x;\rho)$ 中的唯一一条测地线;

(2) 在 $U(x;\rho)$ 中, 距离 $d(y,z)$ 的平方是 y 和 z 的可微函数.

证明 (1) 令 a 是第三章定理 8.7 中所给出的正数, 再令 $0 < \rho < a$. 若 y 和 z 是 $U(x;\rho)$ 的点, 那么由同一定理可知, 它们可用 $U(x;\rho)$ 中的一条测地线 τ 连接起来. 由于 $U(x;\rho)$ 包含在 y 的一个法坐标邻域中 (参看第三章定理 8.7), 所以从命

题 3.4 看出 τ 是连接 y 和 z 并且在 $U(x;\rho)$ 中的唯一测地线, 而且 τ 的长度等于距离, 即 τ 为极小的. 显然 τ 是 M 中连接 y 和 z 的唯一极小测地线.

(2) 若将 M 的每一点 y 与 y 点的零向量等同, 那么就可以将 y 看作 $T(M)$ 的点. 对于 $U(x;\rho)$ 中的每一个 y, 令 N_y 是 y 在 $T_y(M)$ 中的邻域并且使得 $\exp: N_y \to U(x;\rho)$ 是一个微分同胚 (参看第三章定理 8.7 的 (2)). 置 $V = \bigcup\limits_{y\in U(x;\rho)} N_y$. 那么把 $Y \in N_y$ 映射成 $(y, \exp\ Y)$ 的映射 $V \to U(x;\rho)\times U(x;\rho)$ 是一个微分同胚 (参看第三章命题 8.1). 若 $z = \exp\ Y$, 则 $d(y,z) = \| Y \|$. 换言之, $\| Y \|$ 是 V 上的距离函数且它在微分同胚 $V \to U(x;\rho)\times U(x;\rho)$ 下对应于距离函数 $d(y,z)$. 由于 $\| Y \|^2$ 是 V 上的可微函数, 所以 $d(y,z)^2$ 是 $U(x;\rho)\times U(x;\rho)$ 上的可微函数.　证毕.

作为定理 3.6 的应用, 可以得出下列定理.

定理 3.7　令 M 是一个仿紧的可微流形. 那么 M 的每个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 都有一个开加细 $\{V_i\}$ 使得

(1) 每个 V_i 都有紧闭包;

(2) $\{V_i\}$ 按下列意义是局部有限的: M 的每一点都有一个邻域, 它只与有限个 V_i 相交;

(3) V_i 的任何非空有限交均微分同胚于$\mathbf{R}^n$ 的一个开胞腔.

证明　在必要时通过取一个开加细, 则可以假设 $\{U_\alpha\}$ 是局部有限的并且每个 U_α 都有紧闭包. 令 $\{U'_\alpha\}$ 是 $\{U_\alpha\}$ 的一个 (具有相同指标集的) 开加细使得 $\bar{U}'_\alpha \subset U_\alpha$ 对所有 α 成立 (参看附录 3). 在 M 上取任何 Riemann 度量. 对每个 $x \in M$, 令 W_x(按定理 3.6 的意义) 是 x 的一个包含在某个 U'_α 中的凸邻域. 对每个 α, 令

$$\mathfrak{W}_\alpha = \{W_x; W_x \cap \bar{U}'_\alpha \text{是非空的}\}.$$

由于 $\bar{U}'_\alpha$ 是紧的, 因而 $\mathfrak{W}_\alpha$ 有一个覆盖 $\bar{U}'_\alpha$ 的有限子族 $\mathfrak{V}_\alpha$. 那么集族 $\mathfrak{V} = \bigcup\limits_\alpha \mathfrak{V}_\alpha$ 就是所要求的 $\{U_\alpha\}$ 的一个开加细. 事实上从构造过程, 显然 $\mathfrak{V}$ 满足 (1) 和 (2). 如果 $V_1,\cdots,V_k$ 是 $\mathfrak{V}$ 的成员并且 x 和 y 是交集 $V_1\cap\cdots\cap V_k$ 中的点, 那么在 M 中有连接 x 和 y 的唯一极小测地线. 因为该测地线在每个 $V_i(i=1,\cdots,k)$ 中, 所以也在交集 $V_1\cap\cdots\cap V_k$ 中. 由此可知该交集微分同胚于$\mathbf{R}^n$ 的一个开胞腔.　证毕.

评注　满足条件 (1)、(2)、(3) 的覆盖 $\{V_i\}$ 称为单覆盖. 它的用途在于 M 的 Čech 上同调能够用 M 的单覆盖来计算 (参看 Weil[1]).

在任何度量空间 M 中, 将线段定义为闭区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 的连续象 $x(t)$ 并且使得

$$d(x(t_1),x(t_2)) + d(x(t_2),x(t_3)) = d(x(t_1),x(t_3)),\quad a \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant b,$$

其中 d 为距离函数. 作为定理 3.6 的应用又有下列命题.

命题 3.8 令 M 为带度量 g 的 Riemann 流形并且 d 是由 g 定义的距离函数. 那么 (作为点集) 每条线段都是测地线.

参数化的线段可能不是仿射的.

证明 令 $x(t)(a \leqslant t \leqslant b)$ 是 M 中的线段. 首先证明对于某个正数 ε, $x(t)(a \leqslant t \leqslant a+\varepsilon)$ 是测地线. 令 U 在定理 3.6 的意义上是 $x(a)$ 的一个凸邻域. 存在 $\varepsilon > 0$ 使得对于 $a \leqslant t \leqslant a+\varepsilon$, $x(t) \in U$. 令 τ 是从 $x(a)$ 到 $x(a+\varepsilon)$ 的极小测地线. 我们将证明作为点集, τ 和 $x(t)(a \leqslant t \leqslant a+\varepsilon)$ 是一致的. 假设有一个数 $c(a < c < a+\varepsilon)$ 使得 $x(c)$ 不在 τ 上, 那么

$$d(x(a), x(a+\varepsilon)) < d(x(a), x(c)) + d(x(c), x(a+\varepsilon)).$$

这与 $x(t)(a \leqslant t \leqslant a+\varepsilon)$ 是一条线段的事实矛盾. 这说明对于 $a \leqslant t \leqslant a+\varepsilon$, $x(t)$ 是测地线. 继续这种论证, 即可明白对于 $a \leqslant t \leqslant b$, $x(t)$ 是一条测地线. 证毕.

评注 如果 x_t 是一条连续曲线并且对所有 t_1 和 t_2, $d(x_{t_1}, x_{t_2}) = |t_1 - t_2|$, 那么 x_t 就是一条以弧长 t 为参数的测地线.

推论 3.9 令 $\tau = x_t(a \leqslant t \leqslant b)$ 是从 x 到 y 的一条分段 C^1 可微曲线且使得其长度 $L(\tau)$ 等于 $d(x, y)$, 那么作为一个点集, τ 是一条测地线. 此外若 $\| \dot{x}_t \|$ 沿 τ 为常数, 那么 τ 是一条参数化的测地线.

证明 只需证明 τ 是一个线段就行了. 令 $a \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant b$. 将点 x_{t_i} 记为 $x_i (i = 1, 2, 3)$ 并且把由这些点将 τ 分成的弧段分别记为 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$, 则有

$$d(x, x_1) \leqslant L(\tau_1), \; d(x_1, x_2) \leqslant L(\tau_2), \; d(x_2, x_3) \leqslant L(\tau_3), \; d(x_3, y) \leqslant L(\tau_4).$$

如果不是处处有等式成立, 那么就有

$$\begin{aligned} d(x, x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + d(x_3, y) &< L(\tau_1) + L(\tau_2) + L(\tau_3) + L(\tau_4) \\ &= L(\tau) = d(x, y). \end{aligned}$$

这就得出矛盾. 因而就有

$$d(x_1, x_2) = L(\tau_2), \quad d(x_2, x_3) = L(\tau_3).$$

类似地可以看出

$$d(x_1, x_3) = L(\tau_2 + \tau_3).$$

最后, 得到

$$d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) = d(x_1, x_3). \qquad \text{证毕.}$$

利用命题 3.8 可以证明距离函数决定 Riemann 度量.

定理 3.10　令 M 和 M' 分别是带 Riemann 度量 g 和 g' 的 Riemann 流形. 令 d 和 d' 分别是 M 和 M' 上的距离函数. 若 f 是从 M 到 M' 的映射 (并不假定它是连续的或可微的) 使得 $d(x,y)=d'(f(x),f(y))$ 对所有 $x,y\in M$ 成立, 那么 f 是 M 到 M' 的微分同胚并且把张量场 g 映射成张量场 g'.

特别, M 到其自身的每个保持 d 的映射是一个等距变换, 即保持度量 g 不变的变换.

证明　显然 f 是一个同胚. 令 x 是 M 的任意一点并且置 $x'=f(x)$. 对 x' 的一个法坐标邻域 U', 令 U 是 x 的一个法坐标邻域且使得 $f(U)\subset U'$. 对 x 点的任何单位切向量 X, 令 τ 是 U 中以 (x,X) 为初始条件的测地线. 因为 τ 关于 d 是一个线段, 所以 $f(\tau)$ 是关于 d' 的线段, 从而是 U' 中以 x' 为起点的测地线. 因为 $\tau=x_s$ 是由弧长 s 参数化的, 又因为 $d'(f(x_{s_1}),f(x_{s_2}))=d(x_{s_1},x_{s_2})=|s_2-s_1|$, 所以 $f(\tau)=f(x_s)$ 也是被弧长 s 参数化的. 令 $F(X)$ 是 $f(\tau)$ 在 x' 点的单位切向量. 因而 F 是从 x 点的单位切向量集到 x' 点的单位切向量集的映射. 可将它按比例地扩张成从 $T_x(M)$ 到 $T'_x(M')$ 的一个映射, 仍用一字母 F 表示. 因为 f 有一个同样保持距离函数的逆映射, 所以 F 显然是从 $T_x(M)$ 到 $T'_x(M')$ 的一一映射. 显然还有

$$f\circ\exp_x=\exp_x\circ f \ \text{ 且 } \| F(X)\|=\| X\|, X\in T_x(M),$$

其中 $\exp_x(\exp_{x'})$ 是从 0 在 $T_x(M)(T_{x'}(M'))$ 中的一个邻域到 $U(U')$ 上的指数映射. $\exp_x$ 和 $\exp_{x'}$ 都是微分同胚, 所以为证明 f 是把 g 映射成 g' 的从 M 到 M' 的微分同胚, 只需证明 F 是从 $T_x(M)$ 到 $T_{x'}(M')$ 的线性等距映射.

首先证明 $g(X,Y)=g'(F(X),F(Y))$ 对所有 $X,Y\in T_x(M)$ 成立. 因为对任何 $X\in T_x(M)$ 和任何常数 c, $F(cX)=cF(X)$, 所以可假设 X 和 Y 都是单位向量. 那么 $F(X)$ 和 $F(Y)$ 都是 x' 点的单位向量. 置

$$\cos\ \alpha=g(X,Y),\quad \cos\ \alpha'=g'(F(X),F(Y)).$$

令 x_s 和 y_s 分别是以 (x,X) 和 (x,Y) 为初始条件的测地线并且都以其从 x 点算起的弧长为参数. 置

$$x'_s=f(x_s),\quad y'_s=f(y_s).$$

那么 x'_s 和 y'_s 分别是以 $(x',F(X))$ 和 $(x',F(Y))$ 为初始条件的测地线.　证毕.

引理　$\sin\dfrac{1}{2}\alpha=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{1}{2s}d(x_s,y_s),\quad \sin\dfrac{1}{2}\alpha'=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{1}{2s}d(x'_s,y'_s).$

后面将马上给出引理的证明. 我们暂且假定引理成立先来完成定理的证明. 因为 f 保持距离, 所以引理蕴涵着

$$\sin\frac{1}{2}\alpha=\sin\frac{1}{2}\alpha'.$$

因此

$$g(X,Y)=\cos\ \alpha=1-2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$$
$$=1-2\sin^2\frac{1}{2}\alpha'=\cos\ \alpha'=g'(F(X),F(Y)).$$

现在来证明 F 是线性的. 前面已经指出对任何 $X\in T_x(M)$ 和任何常数 c 都有 $F(cX)=cF(X)$. 令 $X_1,\cdots,X_n$ 是 $T_x(M)$ 的规范正交基, 那么正如刚才证明的那样, $X_i'=F(X_i)(i=1,\cdots,n)$ 构成 $T_{x'}(M')$ 的规范正交基. 在 $T_x(M)$ 中给定 X 和 Y, 则有

$$g'(F(X+Y),X_i')=g(X+Y,X_i)=g(X,X_i)+g(Y,X_i)$$
$$=g'(F(X),X_i')+g'(F(Y),X_i')=g'(F(X)+F(Y),X_i')$$

对每个 i 成立, 从而有

$$F(X+Y)=F(X)+F(Y).$$

引理的证明 只要证明第一个公式就行了. 令 U 是在 x 点处带有法坐标系 $x^1,\cdots,x^n$ 的坐标邻域. 令 h 是 U 中由 $\sum_i(dx^i)^2$ 给出的 Riemann 度量, 再令 $\delta(y,z)$ 是 y 和 z 之间关于 h 的距离. 设

$$\overline{\lim_{s\to 0}}\frac{1}{2s}d(x_s,y_s)>\sin\frac{1}{2}\alpha,$$

我们将推出矛盾. (对于反向不等式的情况可用类似的方式论证.) 选取 $c>1$ 使得

$$\overline{\lim_{s\to 0}}\frac{1}{2s}d(x_s,y_s)>c\ \sin\frac{1}{2}\alpha.$$

取 U 允分小, 则可以假设在 U 上 $\frac{1}{c}h<g<ch$ 以下列意义成立:

$$\frac{1}{c}h(Z,Z)<g(Z,Z)<ch(Z,Z),\quad Z\in T_z(M),\quad z\in U.$$

从距离 d 和 δ 的定义得到

$$\frac{1}{c}\delta(y,z)<d(y,z)<c\delta(y,z).$$

因此对于充分小的 s 就有

$$\frac{c}{2s}\delta(x_s,y_s)>\frac{1}{2s}d(x_s,y_s)>c\ \sin\frac{1}{2}\alpha.$$

另一方面, h 是一个 Euclid 度量, 从而

$$\frac{1}{2s}\delta(x_s,y_s)=\sin\frac{1}{2}\alpha.$$

这就得出矛盾. 因此

$$\overline{\lim_{s\to 0}}\frac{1}{2s}d(x_s,y_s)=\sin\frac{1}{2}\alpha.$$

类似地得出

$$\underline{\lim_{s\to 0}}\frac{1}{2s}d(x_s,y_s)=\sin\frac{1}{2}\alpha. \qquad \text{证毕.}$$

定理 3.10 归功于 Myers 和 Steenrod[1]; 本证明是根据 Palais[2] 改写的.

4.4 完 备 性

对于一个 Riemann 流形 M 或者 M 上的 Riemann 度量来说, 如果 Riemann 联络是完备的, 即 M 的每条测地线都能对其标准参数的值延拓到任意大 (参看第三章 3.6 节), 则称该流形 M 或者 M 上的度量 g 是完备的. 我们要证明下面的两个重要定理.

定理 4.1 对一个连通 Riemann 流形 M 来说, 下列条件相互等价:

(1) M 是一个完备的 Riemann 流形;

(2) M 关于距离函数 d 是一个完备度量空间;

(3) M(关于 d) 的每个有界子集是相对紧的;

(4) 对于 M 的任意一点 x 和切空间 $T_x(M)$ 中 (或者更确切地说是在仿射切空间 $A_x(M)$ 中) 的任意一条从原点出发的曲线 C, 都有 M 中从 x 出发的一条曲线 τ 能被展开到给定的曲线 C 上.

定理 4.2 若 M 是一个连通的完备 Riemann 流形, 那么 M 的任何两点 x 和 y 都能由一条极小测地线相连.

证明 我们将这两个定理的证明分为几步来进行.

(i) 证明蕴涵关系 (2) → (1). 令 $x_s(0\leqslant s<L)$ 是一条测地线, 其中 s 是标准参数. 现在证明这条测地线可以延拓到超过 L. 令 $\{s_n\}$ 是一个无穷序列使得 $s_n\uparrow L$. 那么

$$d(x_{s_m},x_{s_n})\leqslant|s_m-s_n|,$$

因而 $\{x_{s_n}\}$ 关于 d 是 M 中的 Cauchy 序列, 从而收敛于某一点 x. 极限点 x 不依赖于收敛地到 L 的序列 $\{s_n\}$ 的选取. 置 $x_L=x$. 利用 x 点的法坐标系, 对某个 $\varepsilon>0$, 可将测线延拓到使其参数 s 满足 $L\leqslant s\leqslant L+\varepsilon$.

(ii) 定理 4.2 的证明. 令 x 是 M 的任意点, 对每个 $r>0$, 置

$$S(r)=\{y\in M;d(x,y)\leqslant r\},$$

$$E(r)=\{y\in S(r);\ y\text{可由极小测地线连接到}x\}.$$

下面将要证明对于每个 $r>0$, $E(r)$ 是紧的并且与 $S(r)$ 一致. 为证明 $E(r)$ 的紧性, 令 $y_i(i=1,2,\cdots)$ 是 $E(r)$ 中的一个点列, 而且对每个 i, 令 τ_i 是从 x 到 y_i 的极小测地线. 令 X_i 是 τ_i 在 x 点的单位切向量. 通过在必要时取一个子序列, 可以假设 $\{X_i\}$ 在 $T_x(M)$ 中收敛于一个单位向量 X_0. 因为对所有 i, $d(x,y_i)\leqslant r$, 同样通过在必要时取子序列, 可以假设 $d(x,y_i)$ 收敛于一个非负数 r_0. 因为 τ_i 是极小的, 所以有

$$y_i=\exp(d(x,y_i)X_i).$$

由于 M 是完备的 Riemann 流形, 所以 $\exp r_0X_0$ 有定义. 置

$$y_0=\exp\ r_0X_0.$$

由此可知 $\{y_i\}$ 收敛于 y_0, 因此 $d(x,y_0)=r_0$. 这蕴涵着测地线 $\exp\ sX_0\ (0\leqslant s\leqslant r_0)$ 是极小的并且 y_0 在 $E(r)$ 中. 这就证明了 $E(r)$ 的紧性. 证毕.

现在证明对所有 $r>0$, $E(r)=S(r)$. 由 x 处的法坐标系和凸邻域的存在性 (参看定理 3.6) 知道对某个 $\varepsilon>0$, $E(r)=S(r)$ 对于 $0<r<\varepsilon$ 成立. 令 r^* 是使 $E(r)=S(r)$ 对 $r<r_0$ 成立的 $r_0>0$ 的上确界. 为了证明 $r^*=\infty$, 假设 $r^*<\infty$. 首先证明 $E(r^*)=S(r^*)$. 令 y 是 $S(r^*)$ 的一点并且令 $\{y_i\}$ 是满足 $d(x,y_i)<r^*$ 且收敛于 y 的点列. (这种序列 $\{y_i\}$ 的存在性可从下列事实得出: x 和 y 能由一条曲线连接而且其长度可以任意接近于 $d(x,y)$.) 那么每个 y_i 属于某个 $E(r)$, 其中 $r<r^*$, 从而每个 y_i 属于 $E(r^*)$. 因为 $E(r^*)$ 是紧的, 所以 y 属于 $E(r^*)$. 因此 $S(r^*)=E(r^*)$. 其次我们将证明对于某个 $\delta>0$, $S(r)=E(r)$ 对于 $r<r^*+\delta$ 成立. 这与 r^* 的定义矛盾. 我们需要下列引理.

引理 在 Riemann 流形 M 上存在一个正连续函数 $r(z)(z\in M)$ 使得 $S_z(r(z))=\{y\in M;\ d(x,y)\leqslant r(z)\}$ 的任何两点均可由一条极小测地线相连.

引理的证明 对于每一点 $z\in M$, 令 $r(z)$ 是 $r>0$ 的上确界使得任何满足 $d(z,y)\leqslant r$ 和 $d(z,y')\leqslant r$ 的两点 y 和 y' 可由一条极小测地线相连. 凸邻域的存在性 (参看定理 3.6) 蕴涵着 $r(z)>0$. 如果 $r(z)=\infty$ 对某个点 z 成立. 那么 $r(y)=\infty$ 对 M 的每一点 y 和 M 上满足引理条件的任何正连续函数成立. 假设对每个 $z\in M$, $r(z)<\infty$. 下面将通过证明 $|r(z)-r(y)|\leqslant d(z,y)$ 来证明 $r(z)$ 的连续性. 不失一般性可以假设 $r(z)>r(y)$. 如果 $d(z,y)\geqslant r(z)$, 那么显然 $|r(z)-r(y)|\leqslant d(z,y)$. 若 $d(z,y)<r(z)$, 那么 $S_y(r')=\{y';d(y,y')\leqslant r'\}$ 包含在 $S_z(r(z))$ 中, 其中 $r'=r(z)-d(z,y)$. 因而 $r(y)\geqslant r(z)-d(z,y)$, 即 $|r(z)-r(y)|\leqslant d(z,y)$. 这就完成了引理的证明.

现在返回到定理 4.2 的证明. 令 $r(z)$ 是引理中给出的连续函数. 令 δ 是 $r(z)$ 在紧集 $E(r^*)$ 上的下确界. 为完成定理 4.2 的证明, 我们来证明 $S(r^*+\delta)=E(r^*+\delta)$.

令 $y \in S(r^*+\delta)$ 但 $\notin S(r^*)$. 首先证明在 $S(r^*)$ 中存在一点 y' 使得 $d(x,y')=r^*$ 并且证明 $d(x,y)=d(x,y')+d(y',y)$. 为此, 对每个正整数 k, 选取一条从 x 到 y 的曲线 τ_k 使得 $L(\tau_k)<d(x,y)+\dfrac{1}{k}$, 其中 $L(\tau_k)$ 是 τ_k 的长度. 令 y_k 是 τ_k 上属于 $E(r^*)=S(r^*)$ 的最后一点, 那么 $d(x,y_k)=r^*$ 且 $d(x,y_k)+d(y_k,y)\leqslant L(\tau_k)<d(x,y)+\dfrac{1}{k}$. 因为 $E(r^*)$ 是紧的, 所以在必要时取一个子序列, 则可以假设 $\{y_k\}$ 收敛于 $E(r^*)$ 的一点 y'. 于是有 $d(x,y')=r^*$ 且 $d(x,y')+d(y',y)=d(x,y)$. 令 τ' 是从 x 到 y' 的极小测地线. 因为 $d(y',y)\leqslant\delta\leqslant r(y')$, 所以有从 y' 到 y 的极小测地线 τ''. 令 τ 是由 τ' 和 τ'' 连接而成的, 那么 $L(\tau)=L(\tau')+L(\tau'')=d(x,y')+d(y',y)=d(x,y)$. 由推论 3.9, τ 是从 x 到 y 的一条测地线, 实际上是一条极小测地线. 因此 $y\in E(r^*+\delta)$. 这就完成了定理 4.2 的证明.

评注　为证明 $E(r)=S(r)$ 对于每个 r 都是紧的, 只需假定从特定点 x 出发的每一条测地线都可以无限延拓.

(iii) 证明定理 4.1 中的蕴涵关系 (1) → (3). 在 (ii) 中已经证明 (1) 蕴涵着对每个 r, $E(r)=S(r)$ 是紧的. 无论在 (ii) 的证明中如何选择 x 点, 对于某个 r, M 的每一个有界子集都包含在 $S(r)$ 中.

(iv) 蕴涵关系 (3) → (2) 是显然的.

(v) 证明蕴涵关系 (4) → (1). 因为一条测地线是 M 中的一条曲线并且它可展开到切空间中的一条直线 (或线段) 上. 显然每一条测地线都可以无限延拓.

(vi) 证明蕴涵关系 (1) → (4). 令 $C_t(0\leqslant t\leqslant a)$ 是 $T_x(M)$ 中从原点出发的任意一条曲线. 我们知道有一个 $\varepsilon>0$ 使得 $C_t(0\leqslant t\leqslant\varepsilon)$ 是 M 中一条曲线 $x_t(0\leqslant t\leqslant\varepsilon)$ 的展开. 令 b 是这种 ε 的上确界. 我们要证明 $b=a$. 假设 $b<a$. 首先证明 $\lim\limits_{t\to b}x_t$ 在 M 中存在. 令 $t_n\uparrow b$. 因为展开保持弧长, 所以 $x_t(t_n\leqslant t\leqslant t_m)$ 的长度等于 $C_t(t_n\leqslant t\leqslant t_m)$ 的长度. 另一方面, 距离 $d(x_{t_n},x_{t_m})$ 小于或等于 $x_t(t_n\leqslant t\leqslant t_m)$ 的长度. 这就蕴涵着 $\{x_{t_n}\}$ 是 M 中的 Cauchy 序列. 因为从 (iii) 和 (iv) 可知蕴涵关系 (1) → (3) 成立, 因而可以看出 $\{x_{t_n}\}$ 收敛于某一点 y. 容易看出 $\lim\limits_{t\to b}x_t=y$. 令 C'_t 是 $T_y(M)$ 中 (更确切地说是 $A_y(M)$ 中) 由曲线 C_t 沿曲线 $x_t(0\leqslant t\leqslant b)$ 仿射平移 (而不是线性平移) 而得到的曲线. 那么 C'_b 是 $T_y(M)$ 的原点. 存在 $\delta>0$ 和一条曲线 $x_t(b\leqslant t\leqslant b+\delta)$ 并且它被展开到曲线 $C'_t(b\leqslant t\leqslant b+\delta)$ 上. 那么曲线 $x_t(0\leqslant t\leqslant b+\delta)$ 可被展开到曲线 $C_t(0\leqslant t\leqslant b+\delta)$ 上. 这与 b 的定义矛盾.　证毕.

推论 4.3　若从一个连通 Riemann 流形 M 的任何一个特定点 x 出发的所有测地线都是无限可延拓的, 那么 M 是完备的.

证明　正如在定理 4.2 的证明中 (ii) 的末尾所指出的那样, 对于每个 r, $E(r)=S(r)$ 都是紧的. 对某个 r, M 的每个有界子集都包含在 $S(r)$ 中, 因而是相对紧的. 证毕.

推论 4.4 每个紧 Riemann 流形都是完备的.

证明 本推论可从定理 4.1 中的蕴涵关系 (3) → (1) 得出. 证毕.

若 Riemann 流形 M 的等距变换群 (即保持度量张量 g 的变换群) 是在 M 上可迁的, 则称该流形 M 是齐性的 (参看例 1.3 和第六章的定理 3.4).

定理 4.5 每个齐性 Riemann 流形都是完备的.

证明 令 x 是齐性 Riemann 流形 M 的一点. 存在 $r > 0$ 使得对于 x 点的每个单位向量 X, 测地线 $\exp\ sX$ 对 $|s| \leqslant r$ 有定义 (参看第三章命题 8.1). 令 $\tau = x_s (0 \leqslant s \leqslant a)$ 是 M 中以 s 为标准参数的任何测地线. 我们将证明 $\tau = x_s$ 可以延拓成对 $0 \leqslant s \leqslant a + r$ 有定义的测地线. 令 φ 是 M 的一个将 x 映射成 x_a 的等距变换. 那么 φ^{-1} 把 x_a 点的单位向量映射为 x 点的单位向量 $X : X = \varphi^{-1}(\dot{x}_a)$. 因为 $\exp sX$ 是过 x 点的测地线, 所以 $\varphi(\exp\ sX)$ 是过 x_a 点的测地线. 置

$$x_{a+s} = \varphi(\exp\ sX), \quad 0 \leqslant s \leqslant r.$$

那么 $\tau = x_s (0 \leqslant s \leqslant a + r)$ 是一条测地线. 证毕.

定理 4.5 也可以从下列一般事实得出：每一个局部紧的齐性度量空间都是完备的.

定理 4.6 令 M 和 M^* 是维数相同的连通 Riemann 流形. 令 $p : M^* \to M$ 是一个等距浸入.

(1) 如果 M^* 是完备的, 那么 M^* 关于投影 p 是 M 的覆盖空间并且 M 也是完备的.

(2) 反之, 若 $p : M^* \to M$ 是覆盖投影并且 M 是完备的, 那么 M^* 是完备的.

证明 将证明分为几步来进行.

(i) 若 M^* 是完备的, 则 M 也是完备的. 令 $x^* \in M^*$ 并且置 $x = p(x^*)$. 令 X 是 M 在 x 点的任何单位向量并且在 x^* 点选取单位向量 X^* 使得 $p(X^*) = X$. 那么 $\exp\ sX = p(\exp\ sX^*)$ 是 M 中以 (x, X) 为初始条件的测地线. 因为 $\exp\ sX^*$ 对 $-\infty < s < \infty$ 的所有 s 有定义, 所以 $\exp\ sX$ 也对同样的 s 有定义. 由推论 4.3 M 是完备的.

(ii) 若 M^* 是完备的, p 将 M^* 映射到 M 上. 令 $x^* \in M^*$ 且 $x = p(x^*)$. 给定 M 的一点 y, 令 $\exp sX (0 \leqslant s \leqslant a)$ 是从 x 到 y 的一条测地线, 其中 X 是 x 点的单位向量. 因为由 (i), M 是完备的, 故由定理 4.2, 这样的测地线存在. 令 X^* 是 M^* 在 x^* 点的单位向量且使得 $p(X^*) = X$. 置 $y^* = \exp\ aX^*$. 那么 $p(y^*) = \exp\ aX = y$.

(iii) 若 M^* 是完备的, 则 $p : M^* \to M$ 为覆盖投影. 对于给定的 $x \in M$ 和每个正数 r, 置

$$U(x; r) = \{y \in M; d(x, y) < r\}, \quad N(x; r) = \{X \in T_x(M); \| X \| < r\}.$$

类似地, 对 $x^* \in M^*$, 置

$$U(x^*;r) = \{y^* \in M^*; d(x^*,y^*) < r\}, \quad N(x^*;r) = \{X^* \in T_{x^*}(M^*); \| X^* \| < r\}.$$

选取 $r > 0$ 使得 $\exp : N(x;2r) \to U(x;2r)$ 是一个微分同胚. 令 $\{x_1^*, x_2^*, \cdots\}$ 是集合 $p^{-1}(x)$, 对每个 x_i^*, 均有下列交换图表:

$$\begin{array}{ccc} N(x_i^*;2r) & \xrightarrow{\exp} & U(x_i^*;2r) \\ \downarrow p_* & & \downarrow p \\ N(x;2r) & \xrightarrow{\exp} & U(x;2r). \end{array}$$

于是只需证明下列三个论断即可:

(a) 对于每个 i, $p : U(x_i^*;r) \to U(x;r)$ 都是微分同胚;

(b) $p^{-1}(U(x;r)) = \bigcup\limits_i U(x_i^*;r)$;

(c) 若 $x_i^* \neq x_j^*$, 则 $U(x_i^*;r) \cap U(x_j^*;r)$ 为空集.

首先 (a) 可从下列事实得出: 在上面的图表中 $p : N(x_i^*;2r) \to N(x;2r)$ 和 $\exp : N(x;2r) \to U(x;2r)$ 都是微分同胚. 为了证明 (b), 令 $y^* \in p^{-1}(U(x;r))$ 并且置 $y = p(y^*)$. 令 $\exp\ sY (0 \leqslant s \leqslant a)$ 是从 y 到 x 的一条极小测地线, 其中 Y 是 y 点的一个单位向量. 令 Y^* 是 y^* 点的单位向量并且使得 $p(Y^*) = Y$. 那么 $\exp\ sY^* (0 \leqslant s \leqslant a)$ 是 M^* 中从 y^* 出发且使得 $p(\exp\ sY^*) = \exp\ sY$ 的一条测地线. 特别, $p(\exp\ aY^*) = x$, 从而 $\exp\ aY^* = x_i^*$ 对某个 x_i^* 成立. 显然, $y^* \in U(x_i^*;r)$, 这证明 $p^{-1}(U(x;r)) \subset \bigcup\limits_i U(x_i^*;r)$. 另一方面, 显然对每个 i 都有 $p(U(x_i^*;r)) \subset U(x;r)$. 因而 $p^{-1}(U(x;r)) \supset \bigcup\limits_i U(x_i^*;r)$. 为了证明 (c), 假设 $y^* \in U(x_i^*;r) \cap U(x_j^*;r)$. 那么 $x_i^* \in U(x_j^*;2r)$. 利用上面的图表即可证明 $p : U(x_j^*;2r) \to U(x;2r)$ 是微分同胚. 因为 $p(x_i^*) = p(x_j^*)$, 所以必有 $x_i^* = x_j^*$.

(iv) (2) 的证明. 设 $p : M^* \to M$ 是覆盖射影而且 M 是完备的. 首先注意到, 给定 M 中的一条曲线 $x_t (0 \leqslant t \leqslant a)$ 并且给定 M^* 中的一点 x_0^* 使得 $p(x_0^*) = x_0$, 那么在 M^* 中有唯一的一条曲线 $x_t^* (0 \leqslant t \leqslant a)$ 使得 $p(x_t^*) = x_t (0 \leqslant t \leqslant a)$. 令 $x^* \in M^*$, 令 X^* 是 x^* 点的任何单位向量. 置 $X = p(X^*)$. 因为 M 是完备的, 所以测地线 $\exp\ sX$ 对于 $-\infty < s < \infty$ 有定义. 由上述结果可以看出, 在 M^* 中有唯一的曲线 $x_s^* (-\infty < s < \infty)$ 使得 $x_0^* = x^*$ 且 $p(x_s^*) = \exp\ sX$. 显然 $x_s^* = \exp\ sX^*$. 这证明 M^* 是完备的. 证毕.

推论 4.7 令 M 和 M^* 是维数相同的连通流形, 并且令 $p : M^* \to M$ 是一个浸入. 如果 M^* 是紧的, 那么 M 也是紧的并且 p 是一个覆盖投影.

证明 取 M 上的任何 Riemann 度量 g. 容易看出在 M^* 上有唯一的 Riemann 度量 g^* 使得 p 是一个等距浸入. 因为由推论 4.4, M^* 是完备的, 所以 p 是一个覆盖投影, 从而 M 是紧的. 证毕.

例 4.1 若一个 Riemann 流形不能作为一个真开子流形等距嵌入到另一个 Riemann 流形中, 则称该子流形是不可延拓的. 定理 4.6 说明每个完备 Riemann 流形是不可延拓的. 但其逆不成立. 例如令 M 是除去原点的 Euclid 平面而 M^* 是 M 的万有覆盖空间. 作为 Euclid 平面的一个开子流形, M 具有自然的 Riemann 度量, 它显然不是完备的. 由定理 4.6, 关于 M^* 上的自然 Riemann 度量 (参看例 2.1), M^* 不是完备的. 可以证明 M^* 是不可延拓的.

推论 4.8 令 G 是连通 Riemann 流形 M 的等距变换群. 若 M 的一点 x 的轨道 $G(x)$ 包含 M 的一个开集, 那么轨道 $G(x)$ 就同 M 一致, 即 M 是齐性的.

证明 容易看出 $G(x)$ 在 M 中是开的. 令 M^* 是 $G(x)$ 的一个连通分支. 对 M^* 的任何两点 x^* 和 y^* 都有 G 的一个元素 f 使得 $f(x^*)=y^*$. 因为 f 把 $G(x)$ 的每个连通分支映射到 $G(x)$ 的连通分支上, 所以 $f(M^*)=M^*$. 从而 M^* 是作为开子流形等距嵌入到 M 中的一个齐性 Riemann 流形. 因此 $M^*=M$. 证毕.

命题 4.9 令 M 是一个 Riemann 流形, M^* 是 M 的一个子流形而且它在下述意义上是局部闭的: M 的每一点 x 都有一个邻域 U 使得 $U\cap M^*$ 的每一个连通分支在 U 中 (关于 M^* 的拓扑) 是闭的. 如果 M 是完备的, 那么 M^* 关于诱导度量也是完备的.

证明 令 d 是由 M 的 Riemann 度量定义的距离函数而 d^* 是由 M^* 的 Riemann 度量定义的距离函数. 令 x_s 是 M^* 中的一条测地线并且令 a 是使得 x_s 有定义的 s 的上确界. 为了证明 $a=\infty$, 假设 $a<\infty$. 令 $s_n\uparrow a$. 因为 $d(x_{s_n},x_{s_m})\leqslant d^*(x_{s_n},x_{s_m})\leqslant |s_n-s_m|$, 所以 $\{x_{s_n}\}$ 是 M 中的一个 Cauchy 序列, 从而收敛于 M 的一点 x. 那么 $x=\lim\limits_{s\to a}x_s$. 令 U 是 x 在 M 中的一个具有命题中所述性质的邻域. 那么对于某个 b, $x_s(b\leqslant s<a)$ 在 U 中. 因为 $M^*\cap U$ 的包含 $x_s(b\leqslant s<a)$ 的连通分支在 U 中是闭的. 所以 x 点属于 M^*. 置 $x_a=x$, 那么 $x_s(0\leqslant s\leqslant a)$ 是 M^* 中的一条测地线. 利用 x_a 点的法坐标系可以看出, 对于某个 $\delta>0$, 这条测地线可以延拓为测地线 $x_s(0\leqslant s\leqslant a+\delta)$. 证毕.

4.5 和 乐 群

在本节中, 我们始终令 M 是一个带有度量 g 的连通 Riemann 流形而 $\Psi(x)$ 是 Riemann 联络关于基点 x 的线性和乐群或者齐次和乐群 (参看第二章 2.4 节和第三章 3.3 节). 然后根据 $\Psi(x)$ 作为作用在 $T_x(M)$ 上的线性群是可约的或不可约的而相应地称 M 是可约的或不可约的. 本节我们将研究 $\Psi(x)$ 以及可约 Riemann 流形的局部结构.

假设 M 是可约的, 令 T'_x 是 $T_x(M)$ 的一个经 $\Psi(x)$ 作用不变的非平凡子空间, 给定一点 $y\in M$, 令 τ 是从 x 到 y 的一条曲线而 T'_y 是 T'_x 在沿 τ 的 (线性) 平移

下的象. $T_y(M)$ 的子空间 T'_y 不依赖于 τ 的选取. 事实上, 如果 μ 是从 x 到 y 的任何其他曲线, 那么 $\mu^{-1}\cdot\tau$ 是 x 点处的闭曲线而且子空间 T'_x 是经过沿 $\mu^{-1}\cdot\tau$ 平移不变的, 即 $\mu^{-1}\cdot\tau(T'_x)=T'_x$, 因此 $\tau(T'_x)=\mu(T'_x)$. 因而我们得到一个分布 T', 它对 M 的每个点 y 指派 $T_y(M)$ 的子空间 T'_y.

对于 Riemann 流形 (或者更一般地, 带线性联络的流形)M 的一个子流形 N 来说, 若对每个 $X\in T_x(N)$, 由 (x,X) 决定的 M 的测地线 $\tau=x_t$ 当参数 t 的值充分小时在 N 中, 那么就称子流形 N 在 x 点是全测地的. 如果 N 在它的每一点处都是全测地的, 则将 N 称为 M 的全测地子流形.

命题 5.1 (1) 分布 T' 是可微的并且是对合的;

(2) 令 M' 是 T' 的过 M 的一点的极大积分流形, 则 M' 是 M 的全测地子流形. 如果 M 是完备的, 那么 M' 关于诱导度量也是完备的.

证明 (1) 为了证明 T' 是可微的, 令 y 是 M 的任一点并且 $x^1,\cdots,x^n$ 是 y 点的一个法坐标系并在 y 的某个邻域内有效. 令 $X_1,\cdots,X_k$ 是 T'_y 的一个基. 对于每个 $i(1\leqslant i\leqslant k)$, 用

$$(X_i^*)_2=\tau X_i,\quad z\in U$$

定义 U 上的向量场 X_i^*, 其中 τ 是由 $x^j=a^jt(j=1,\cdots,n)$ 给出的从 y 到 z 的测地线, $(a^1,\cdots,a^n)$ 是 z 的坐标. 因为平行移动 τ 可微地依赖于 $(a^1,\cdots,a^n)$, 从而得出 U 中的可微向量场 X_i^*. 显然对于 U 中的每一点 $z,X_1^*,\cdots,X_k^*$ 均构成 T'_z 的基.

为证明 T' 是对合的, 只需证明若 X 和 Y 为属于 T' 的向量场, 则 ∇_XY 和 ∇_YX 也是, 因为 Riemann 联络是无挠的并且 $[X,Y]=\nabla_XY-\nabla_YX$(参看第三章定理 5.1). 令 x_t 是从任一点 y 出发的 X 的积分曲线. 令 τ_0^t 是沿此曲线从 x_t 点到 $y=x_0$ 点的平行移动. 因为对于每个 t, Y_y 和 Y_{x_t} 属于 T', 所以 $\nabla_XY=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t}(\tau_0^tY_{x_t}-Y_y)$ 属于 T'_y.

(2) 令 M' 是 T' 的极大积分流形. 令 $\tau=x_t$ 是 M 上以 (y,X) 为初始条件的测地线, 其中 $y\in M'$, $X\in T_y(M')=T'_y$. 因为切向量 $\dot{x}_t$ 沿 τ 是平行的, 故可看出对于每个 t, $\dot{x}_t$ 属于 T'_{x_t}, 从而 τ 在 M' 中 (参看第二章定理 7.2 的引理 2). 这说明 M' 是 M 的全测地子流形. 从下列引理可以推出: 若 M 是完备的, 则 M' 也是完备的. 证毕.

引理 令 N 是 Riemann 流形 M 的全测地子流形. N 的关于诱导 Riemann 度量的每条测地线都是 M 中的测地线.

引理的证明 令 $x\in N,X\in T_x(N)$. 令 $\tau=x_t(0\leqslant t\leqslant a)$ 是以 (x,X) 为初始条件的 M 的测地线. 因为 N 是全测地的, 所以 τ 在 N 中. 于是只需证明 τ 是 N 的关于诱导 Riemann 度量的测地线. 令 d 和 d' 分别是 M 和 N 的距离函数. 因为只考虑充分小的 t 值, 因而可以假设 τ 是从 $x=x_0$ 到 x_a 的极小测地线, 所以

$d(x, x_a) = L(\tau)$, 其中 $L(\tau)$ 是 τ 的弧长. τ 用 M 的度量测得的弧长和用 N 的诱导度量测得的弧长是相同的. 由距离函数 d 和 d' 的定义得到

$$d'(x, x_a) \geqslant d(x, x_a) = L(\tau).$$

从而 $d'(x, x_a) = L(\tau)$. 由推论 3.9, τ 是关于 N 的诱导度量的测地线. 证毕.

评注 这个引理是我们将在第二卷中予以证明的以下两个事实的推论: (1) 若 M 是一个带无挠线性联络的流形并且 N 是 M 的全测地子流形, 那么 N 有一个自然诱导的线性联络使得 N 的每条测地线都是 M 的测地线. (2) 若 N 是 Riemann 流形 M 的全测地子流形, 那么 N 的自然诱导的线性联络是关于 N 的诱导度量的 Riemann 联络. 请注意到命题 5.1 在 M 是带无挠线性联络的流形这样一个较弱的假设条件下仍然成立.

令 T' 是如上定义的一个分布. 现在我们要用到齐次和乐群是由 $T_x(M)$ 的正交变换组成的这一事实. 令 T''_x 是 T'_x 在 $T_x(M)$ 中的正交补, 那么 $T_x(M)$ 是两个经 $\Psi(x)$ 作用不变的子空间 T'_x 和 T''_x 的直和. 正如从 T'_x 得到 T' 一样, 我们从子空间 T''_x 可以得到一个分布 T''. 在 M 的每一点处, T' 和 T'' 都是互补的且相互正交的.

命题 5.2 令 y 是 M 的任意点. 令 M' 和 M'' 是上面定义的分布 T' 和 T'' 的极大积分流形. 那么 y 有一个开邻域 V 使得 $V = V' \times V''$, 其中 V' 和 V'' 分别是 y 在 M' 和 M'' 中的开邻域, 并且 V 的 Riemann 度量是 V' 和 V'' 的 Riemann 度量的直积.

证明 首先证明下列引理. 证毕.

引理 若 T' 和 T'' 是流形 M 上的两个对合分布而且它们在 M 的每一点都是互补的. 那么对 M 的每一点 y 都存在一个以 y 为原点的局部坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 使得 $(\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^k)$ 和 $(\partial/\partial x^{k+1}, \cdots, \partial/\partial x^n)$ 分别构成 T' 和 T'' 的局部基. 换句话说, 对于任何常数组 $(c^1, \cdots, c^k, c^{k+1} \cdots, c^n)$, 方程组 $x^i = c^i (1 \leqslant i \leqslant k)$ 和 $x^j = c^j (k+1 \leqslant j \leqslant n)$ 分别定义 T'' 和 T' 的一个积分流形.

引理的证明 因为 T' 是对合的, 所以存在以 y 为原点的局部坐标系 $y^1, \cdots, y^k, x^{k+1}, \cdots, x^n$ 使得 $(\partial/\partial y^1, \cdots, \partial/\partial y^k)$ 构成 T' 的局部基. 换句话说, 方程组 $x^j = c^j (k+1 \leqslant j \leqslant n)$ 定义 T' 的一个积分流形. 类似地, 存在一个以 y 为原点的局部坐标系 $x^1, \cdots, x^k$, $z^{k+1}, \cdots, z^n$, 使得 $(\partial/\partial z^{k+1}, \cdots, \partial/\partial z^n)$ 构成 T'' 的局部基. 换言之, 方程组 $x^i = c^i (1 \leqslant i \leqslant k)$ 定义 T'' 的一个积分流形. 容易看出 $x^1, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n$ 是满足要求的局部坐标系.

现在利用这样得到的局部坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 来证明命题 5.2. 令 V 是由 $|x^i| < c (1 \leqslant i \leqslant n)$ 定义的 y 的邻域, 其中 c 是一个充分小的正数因而坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 给出一个从 V 到$\mathbf{R}^n$ 中的立方体 $|x^i| < c$ 的同胚. 令 V'(相应地 V'') 是 V 中由 $|x^i| < c$, $1 \leqslant i \leqslant k$ 和 $x^j = 0$, $k+1 \leqslant j \leqslant n$(相应地, $x^i = 0, 1 \leqslant i \leqslant k$ 和

$|x^j| < c,\ k+1 \leqslant j \leqslant n$) 定义的点集. 显然 $V'(V'')$ 是 $T'(T'')$ 过 y 点的积分流形并且是 y 点在 $M'(M'')$ 中的邻域, 而且显然有 $V = V' + V''$. 置 $X_i = \partial/\partial x^i, 1 \leqslant i \leqslant n$. 为证明 V 的 Riemann 度量是 V' 和 V'' 的相应度量的直积, 我们证明：对于 $1 \leqslant i, j \leqslant k,\ g_{ij} = g(x_i, x_j)$ 不依赖于 $x^{k+1}, \cdots, x^n$; 对于 $k+1 \leqslant i, j \leqslant n,\ g_{ij} = g(X_i, X_j)$ 不依赖于 $x^1, \cdots, x^k$; 而对 $1 \leqslant i \leqslant k, k+1 \leqslant j \leqslant n,\ g_{ij} = g(X_i, X_j) = 0$. 最后一个论断是明显的, 因为 $X_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ 属于 T' 而 $X_j (k+1 \leqslant j \leqslant n)$ 属于 T'', 又因为 T' 和 T'' 在每一点都是正交的. 现在来证明第一个论断, 而第二个论断的证明是类似的. 令 $1 \leqslant i \leqslant k$ 且 $k+1 \leqslant m \leqslant n$. 正如在命题 5.1(1) 的证明中那样, 可以看出 $\nabla_{X_m} X_i$ 属于 T' 而 $\nabla_{X_i} X_m$ 属于 T''. 因为挠率为零且 $[X_i, X_m] = 0$, 所以有

$$\nabla_{X_i} X_m - \nabla_{X_m} X_i = \nabla_{X_i} X_m - \nabla_{X_m} X_i - [X_i, X_m] = 0.$$

从而 $\nabla_{X_i} X_m = \nabla_{X_m} X_i = 0$. 因为 g 是平行的, 所以

$$\begin{aligned} X_m(g_{ij}) =& \nabla_{X_m}(g(X_i, X_j)) \\ =& g(\nabla_{X_m} X_i, X_j) + g(X_i, \nabla_{X_m} X_j) = 0,\ 1 \leqslant i, j \leqslant k, \end{aligned}$$

这样就证明了命题的结论. 证毕.

命题 5.3 令 T' 和 T'' 是命题 5.2 中所用到的 M 上的分布. 若 M 是单连通的, 那么齐次和乐群 $\Psi(x)$ 可以分解为两个正规子群 $\Psi'(x)$ 和 $\Psi''(x)$ 的直积并且使得 $\Psi'(x)$ 在 T''_x 上是平凡的而 $\Psi''(x)$ 在 T'_x 上是平凡的.

证明 给定一个元素 $a \in \Psi(x)$, 令 a_1(相应地 a_2) 是 a 在 $T'_x(T''_x)$ 上的限制. 令 $a'(a'')$ 是 $T_x(M)$ 的正交变换, 并且它在 T'_x 上与 a_1(在 T''_x 上与 a_2) 一致, 而在 $T''_x(T'_x)$ 上是平凡的. 若取 $T_x(M)$ 的规范正交基使得前 k 个向量在 T'_x 中而其余 $n-k$ 个向量在 T''_x 中. 那么这些线性变换可用矩阵表示如下：

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad a' = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

现在证明 a' 和 a'' 都是 $\Psi(x)$ 的元素. 令 τ 是 x 点处的一条闭曲线并且使得沿着 τ 的平移是给定的元素 $a \in \Psi(x)$. 首先考虑 τ 按下述意义是一个小套索的特殊情况. 若 x 点处的一条闭曲线 τ 可以分解成如下的三条曲线: $\tau = \mu^{-1} \cdot \sigma \cdot \mu$, 其中 μ 是从 x 到一点 y 的曲线 (因而 μ^{-1} 则是从 y 返回到 x 的曲线) 而 σ 则是 y 点处的一条闭曲线而且它足够小以至于它能被包含在命题 5.2 所给出的 y 的邻域 $V = V' \times V''$ 中, 那么就将曲线 τ 称为一个小套索. 在这种特殊情况下, 用 $\sigma'(\sigma'')$ 表示 σ 在自然射影 $V \to V'(V \to V'')$ 下的象. 置

$$\tau' = \mu^{-1} \cdot \sigma' \cdot \mu, \quad \tau'' = \mu^{-1} \cdot \sigma'' \cdot \mu.$$

在 $T''_y(T'_y)$ 上沿 $\tau'(\tau'')$ 的平移是平凡的. 沿 σ 的平移是沿 σ' 和 σ'' 平移的积. 从而沿 τ 的平移是沿 τ' 和 τ'' 平移的积. 另一方面, $\tau'(\tau'')$ 在 $T''_x(T'_x)$ 上是平凡的. 由此可知, $a'(a'')$ 是沿 $\tau'(\tau'')$ 的平移. 因而在 τ 是小套索的情况下证明了命题的论断. 证毕.

在一般情况下. 可将 τ 分解成小套索的积如下.

引理 如果 M 是单连通的, 那么沿 τ 的平移是沿 x 处有限个小套索平移的积.

引理的证明: 本引理可从附录 7 的因子分解引理得出.

于是在一般情况下, a' 和 a'' 属于 $\Psi(x)$ 是明显的. 置

$$\Psi'(x) = \{a'; a \in \Psi(x)\}, \quad \Psi''(x) = \{a''; a \in \Psi(x)\},$$

那么 $\Psi(x) = \Psi'(x) \times \Psi''(x)$. 证毕.

现在我们来定义 $T_x(M)$ 的一种最自然的分解并导出相应的结论. 令 T_x^0 是 T_x 中那些在 $\Psi(x)$ 作用下保持不动的元素的集合, 这是 $\Psi(x)$ 平凡作用于其上的 $T_x(M)$ 的最大线性子空间. 令 T'_x 是 T_x^0 在 $T_x(M)$ 中的正交补, 那么它是经 $\Psi(x)$ 作用不变的并且可以分解成一些相互正交的、不可约的不变子空间的直和: $T'_x = \sum_{i=1}^{k} T_x^{(i)}$, 并将分解式 $T_x(M) = \sum_{i=0}^{k} T_x^{(i)}$ 称为 $T_x(M)$ 的标准分解 (或者称为 de Rham 分解).

定理 5.4 令 M 是一个 Riemann 流形, $T_x(M) = \sum_{i=0}^{k} T_x^{(i)}$ 是 $T_x(M)$ 的标准分解而且对于每个 $i = 0, 1, \cdots, k$, $T^{(i)}$ 是通过平移 $T_x^{(i)}$ 而得到的 M 上的对合分布. 令 y 是 M 的一点并且令 $M_i (i = 0, 1, \cdots, k)$ 是 $T^{(i)}$ 过 y 点的极大积分流形. 那么

(1) 点 y 有一个开邻域 V 使得 $V = V_0 \times V_1 \times \cdots \times V_k$, 其中 V_i 是 y 点在 M_i 中的开邻域并且 V 上的 Riemann 度量是各个 V_i 的 Riemann 度量的直积;

(2) 极大积分流形 M_0 按下述意义是局部 Euclid 的: M_0 的每一点都有一个邻域与 n_0 维 Euclid 空间的开集等距同构, 其中 $n_0 = \dim\ M_0$;

(3) 如果 M 是单连通的, 那么齐次和乐群 $\Psi(x)$ 是一些正规子群的直积 $\Psi_0(x) \times \Psi_1(x) \times \cdots \times \Psi_k(x)$, 其中当 $i \neq j$ 时, $\Psi_i(x)$ 在 $T_x^{(j)}$ 上是平凡的并且对每个 $i = 1, \cdots, k$, $\Psi_i(x)$ 在 $T_x^{(i)}$ 上都是不可约的, 而 $\Psi_0(x)$ 仅由单位元组成;

(4) 若 M 是单连通的, 那么标准分解 $T_x(M) = \sum_{i=0}^{k} T_x^{(i)}$ 在不计项序的条件下是唯一的.

证明 (1) 本款是命题 5.2 的推广.

(2) 因为 y 是 M 的任意点, 所以只需证明 V_0 等距同构于 n_0 维 Euclid 空间的一个开子集即可. 因为 V_0 的齐次和乐群仅由单位元组成, 所以 $T_y^{(0)}$ 是 n_0 个 1

维子空间的直和. 从命题 5.2 的证明可知, V_0 是一些 1 维子流形的直积而且 V_0 的 Riemann 度量是这些 1 维子流形的 Riemann 度量的直积. 另一方面, 在任何带局部坐标系 x^1 的 1 维流形上, 每个 Riemann 度量都具有 $g_{11}dx^1dx^1$ 的形式. 若 x^1 是法坐标系, 则度量的形式为 dx^1dx^1. 因此 V_0 等距同构于 Euclid 空间的一个开集.

(3) 从 $T_x(M)$ 的标准分解的定义和命题 5.3 的证明, 本款是明显的.

(4) 我们首先需要一个引理. 证毕.

引理 令 S_x 是 $T_x(M)$ 的任何经 $\Psi(x)$ 作用不变的子空间. 那么对每个 $i = 1,\cdots,k$, 要么 S_x 正交于 $T_x^{(i)}$, 要么 S_x 包含 $T_x^{(i)}$.

引理的证明 (i) 假设 S_x 的所有向量在 $\Psi(x)$ 的作用下保持不动, 那么 S_x 正交于 $T_x^{(i)}$. 实际上, 令 $X = \sum_{j=0}^{k} X_j$ 是 S_x 的任何元素, 其中 $X_j \in T_x^{(j)}$. 对于 $\Psi_i(x)$ 的任一元素 a_i, 有

$$a_i(x) = X_0 + X_1 + \cdots + a_i(X_i) + \cdots + X_k.$$

这是因为若 $j \neq i$, 则 a_i 平凡地作用在 $T_x^{(i)}$ 上. 如果 $a_i(X) = X$, 那么 $a_i(X_i) = X_i$. 因为这对于每个 $a_i \in \Psi_i(x)$ 成立, 又因 $\Psi_i(x)$ 在 $T_x^{(i)}$ 中是不可约的, 所以必然有 $X_i = 0$. 这说明 X 正交于 $T_x^{(i)}$.

(ii) 假设 $a_i(X) \neq X$ 对某个 $a_i \in \Psi_i(x)$ 和某个 $X \in S_x$ 成立. 令 $X = \sum_{j=0}^{k} X_j$, 其中 $X_j \in T_x^{(j)}$. 因为每个 $X_j (j \neq i)$ 在 $\Psi_i(x)$ 的每个元素作用下保持不变, 所以 $X - a_i(X) = X_i - a_i(X_i) \neq 0$ 不仅是 S_x 中的向量而且还是 $T_x^{(i)}$ 中的向量. 子集 $\{b_i(X - a_i(X)); b_i \in \Psi_i(x)\}$ 在 $T_x^{(i)} \cap S_x$ 中并且张成 $T_x^{(i)}$, 因为 $\Psi_i(x)$ 在 $T_x^{(i)}$ 中是不可约的. 这就蕴涵着 $T_x^{(i)}$ 包含在 S_x 中, 从而证明了引理.

现在返回到 (4) 的证明. 令 $T_x(M) = \sum_{j=0}^{l} S_x^{(j)}$ 是其他任何标准分解. 首先, $T_x^{(0)} = S_x^{(0)}$ 是显然的. 因而只需证明每个 $S_x^{(j)} (1 \leqslant j \leqslant l)$ 均与某个 $T_x^{(i)}$ 一致. 例如, 我们考虑 $S_x^{(1)}$. 由引理, 要么它对每个 $i \geqslant 1$ 都正交于 $T_x^{(i)}$, 要么对某个 $i \geqslant 1$, 它包含 $T_x^{(i)}$. 在第一种情况下, 它必定包含于 $\sum_{i=1}^{k} T_x^{(i)}$ 在 $T_x(M)$ 中的正交补 $T_x^{(0)}$ 中. 这显然矛盾. 在第二种情况下, $S_x^{(1)}$ 的不可约性蕴涵着 $S_x^{(1)}$ 与 $T_x^{(i)}$ 实际上是一致的. 证毕.

下列结果归功于 Borel 和 Lichnerowicz[1].

定理 5.5 一个 Riemann 流形 M 的限制齐次和乐群是 $SO(n)$ 的一个闭子群, 其中 $n = \dim\ M$.

证明 因为 M 的万有覆盖空间的齐次和乐群同构于 M 的限制齐次和乐群 (参看例 2.1), 所以不失一般性, 可以假设 M 是单连通的. 根据定理 5.4, 本定理的

结论可从 Lie 群论中的下列结果得出：

令 G 是不可约地作用于 n 维向量空间$\mathbf{R}^n$ 上的 $SO(n)$ 的一个连通 Lie 子群，那么 G 在 $SO(n)$ 中是闭的. 证毕.

这个结果的证明在附录 5 中给出.

4.6 de Rham 分解定理

令 M 是一个连通并且单连通的完备 Riemann 流形. 假设 M 是可约的. 令 $T_x(M) = T'_x + T''_x$ 是分解成经线性和乐群 $\Psi(x)$ 作用不变的子空间的一种分解并且就像 4.5 节开头那样令 T' 和 T'' 分别是由 T'_x 和 T''_x 定义的平行分布. 固定一点 $O \in M$ 并且令 M' 和 M'' 分别是 T' 和 T'' 的经过 O 点的极大积分流形. 由命题 5.1, M' 和 M'' 都是 M 的全测地完备子流形.

本节的目的是要证明下列定理.

定理 6.1 M 等距同构于直积 $M' \times M''$.

证明 对于 M 中满足 $z_0 = 0$ 的任何曲线 $z_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$, 我们将把它在 M' 上的射影定义为如下得出的满足 $x_0 = 0$ 的曲线 $x_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$. 令 C_t 是 z_t 在仿射切空间 $T_0(M)$ 中的展开. (为了简单起见. 我们将把仿射切空间与切 (向量) 空间等同.) 因为 $T_0(M)$ 是两个 Euclid 空间 T'_0 和 T''_0 的直积, 所以 C_t 可以用序对 (A_t, B_t) 表示, 其中 A_t 和 B_t 分别是 T'_0 和 T''_0 中的曲线. 通过把定理 4.1 的 (4) 应用于 M', 可以看出在 M' 中存在唯一的一条曲线 x_t, 它能被展开到曲线 A_t 上. 根据第三章的命题 4.1, 可定义曲线 x_t 如下：对每一个 t, 令 X_t 是 $\dot{z}_t$ 的 T' 分量 (沿曲线 z_t) 从 z_t 点平行移动到 $0 = z_0$ 点的结果. 曲线 x_t 是 M' 中满足 $x_0 = 0$ 的一条曲线并且使得对每一个 t, $\dot{x}_t$ 沿此曲线平移到 O 点的结果等于 X_t. 证毕.

在继续往下论证之前, 我们先来简述证明的主要思想. 我们欲证若 M 是单连通的, 那么射影 x_t 的端点 x_1 只依赖于曲线 z_t 的端点 z_1. 因而得到一个射影 $p' : M \to M'$, 并且类似地得到一个射影 $p'' : M \to M''$. 我们将证明从 M 到 $M' \times M''$ 的映射 $p = (p', p'')$ 在每一点处都是等距映射. 于是定理 4.6 蕴涵着 p 是从 M 到 $M' \times M''$ 上的覆盖射影. 如果 h 是 M 中从 M' 的一条曲线到 M' 的另一条曲线的同伦, 那么 $p'(h)$ 是 M' 中两条曲线之间的同伦. 因而 M' 是单连通的. 类似地, M'' 也是单连通的. 因而 p 是从 M 到 $M' \times M''$ 的等距映射. 现在详述如下.

引理 1 令 $\tau = z_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是 M 中满足 $z_0 = 0$ 的一条曲线并且令 a 为适合 $0 \leqslant a \leqslant 1$ 的任何数. 令 τ_1 是曲线 $z_t(0 \leqslant t \leqslant a)$ 而 τ_2 是曲线 $z_t(a \leqslant t \leqslant 1)$, 令 τ'_2 是 τ_2 在 T' 过 z_a 点的极大积分流形 $M'(z_a)$ 上的射影. 那么 $\tau = \tau_2 \cdot \tau_1$ 在 M' 上的射影与 $\tau' = \tau'_2 \cdot \tau_1$ 的射影一致.

引理 1 的证明 从用切向量的 (线性) 平移给出的射影的第二种定义, 本引理是明显的.

引理 2 令 $z \in M$. 令 $V = V' \times V''$ 是 z 在 M 中的一个开邻域, 其中 V' 和 V'' 分别是 z 在 $M'(z)$ 和 $M''(z)$ 中的开邻域. 对于 V 中满足 $z_0 = z$ 的任何曲线 z_t, 它在 $M'(z)$ 中的射影由 V 到 V' 上的自然射影给出.

引理 2 的证明 对于邻域 $V = V' \times V''$ 的存在性可以参看命题 5.2. 令 z_t 由序对 (x_t, y_t) 给出, 其中 $x_t(y_t)$ 是 $V'(V'')$ 中满足 $x_0 = z(y_0 = z)$ 的曲线. 因为 $V = V' \times V''$, 所以 $\dot{z}_t$ 的 T' 分量从 z_t 到 $z_0 = z$ 沿曲线 z_t 的平移跟 $\dot{x}_t$ 从 x_t 到 $x_0 = z$ 沿曲线 x_t 的平移是相同的. 因而 x_t 是曲线 z_t 在 $M'(z)$ 中的射影.

现在引入下列术语. 如果 (分段可微) 曲线 z_t 对于每个 t 都有 $\dot{z}_t$ 属于 $T'_{z_t}(T''_{z_t})$, 则称该曲线为 $T'(T'')$ 曲线. 给定一个 (分段可微的) 同伦 $z : [0,] \times [0, s_0] \to M$, 记为 $z(t,s) = z_t^s$, 我们将用 $z_t^{(s)}(z_{(t)}^s)$ 表示以 t 为参数而 s 固定 (以 s 为参数而 t 固定) 的曲线, 它们的切向量分别记为 $\dot{z}_t^{(s)}$ 和 $\dot{z}_{(t)}^s$. 对于任何点 $z \in M$, 令 $d'(d'')$ 表示 $T'(T'')$ 过 z 点的极大积分流形 $M'(z)(M''(z))$ 上的距离函数. 令 $U'(z,r)(U''(z,r))$ 表示由满足 $d'(z,w) < r(d''(z,w) < r)$ 的点 $w \in M'(z)(w \in M''(z))$ 组成的点集.

引理 3 令 $\tau' = x_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是一条 T' 曲线. 那么存在一个数 $r > 0$ 和从 $U''(x_0; r)$ 到 $U''(x_t; r)$ 的一族等距映射 $f_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 满足下列性质:

(1) f_t 在 x_0 点的微分与沿曲线 τ' 从 x_0 到 x_t 的平移一致;

(2) 对 $U''(x_0; r)$ 中满足 $y^0 = x_0$ 的任何曲线 $\tau'' = y^s(0 \leqslant s \leqslant s_0)$, 置 $z_t^s = f_t(y^s)$. 那么 (a) 对于任何 $0 \leqslant t_1 \leqslant 1$ 和 $0 \leqslant s_1 \leqslant s_0$, 沿着由下列四条曲线构成的"平行四边形"的平移是平凡的: 这四条曲线分别是曲线 $x_t(0 \leqslant t \leqslant t_1)$, 曲线 $z_{(t)}^s(0 \leqslant s \leqslant s_1)$, 曲线 $z_t^{(s_1)}(0 \leqslant t \leqslant t_1)$ 的反向曲线以及 $y^s(0 \leqslant s \leqslant s_1)$ 的反向曲线. (b) 对于任何 s 和 t, $\dot{z}_t^{(s)}$ 沿曲线 $z_{(t)}^s$ 平行于 $\dot{x}_t$; (c) 对任何 s 和 t, $\dot{z}_{(t)}^s$ 沿曲线 $z_t^{(s)}$ 平行于 $\dot{y}_s$.

引理 3 的证明 就像在命题 5.2 中那样令 V 是 x_0 的一个形如 $V = V' \times V''$ 的邻域. 选取一个充分小的数 $r > 0$ 使得当 $0 \leqslant t \leqslant r$ 时 $x_t \in V'$ 且 $U''(x_t; r) \subset \{x_t\} \times V''$. 对于 $y \in U''(x_0; r)$, 用 $f_t(x_0, y) = (x_t, y)$ 定义 f_t. 显然等距映射族 $f_t(0 \leqslant t \leqslant r)$ 满足 (1) 和 (2) 的全部性质. 通过用有限个 $V = V' \times V''$ 型邻域覆盖曲线 $\tau' = x_t$ 并对每个邻域使用上面的论证, 则容易将等距映射族扩张到 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 和一个适当的 $r > 0$.

引理 4 令 $\tau' = x_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是一条 T' 曲线, 令 $\tau'' = y^s(0 \leqslant s \leqslant s_0)$ 是一条满足 $y^0 = x_0$ 的 T'' 测地线, 其中 s 是弧长. 那么存在一个同伦 $z_t^s(0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant s \leqslant s_0)$ 满足下列性质:

(1) $z_t^{(0)} = x_t,\ z_{(0)}^s = y^s$;

(2) z_t^s 具有引理 3 的性质 (a), (b), (c).

同伦 z_t^s 是唯一确定的. 事实上, 若 Y_t 是测地线 τ'' 的初始切向量 $Y_0 = \dot{y}^0$ 沿曲线 τ' 平行移动的结果, 那么 $z_t^s = \exp\ sY_t$.

引理 4 的证明 首先证明唯一性. 由 (a) 和 (c) 以及 τ'' 是测地线的事实可知 $\dot{z}_{(t)}^s$ 沿曲线 $z_{(t)}^s$ 平行于 Y_t. 这意味着 $z_{(t)}^s$ 是以 Y_t 为初始切向量的测地线, 因而 $z_t^s = \exp\ sY_t$, 这就证明了唯一性.

因此剩下要证明的是: $z_t^s = \exp\ sY_t$ 实际上满足条件 (1) 和 (2). 条件 (1) 是明显的. 为了证明 (2), 可以假设 τ' 是可微曲线, 因而 z_t^s 对 (t, s) 是可微的. 像在引理 3 中那样令 f_t 是等距映射族. 显然存在一个 $\delta > 0$ 使得对于 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 和 $0 \leqslant s \leqslant \delta$, 有 $z_t^s = f_t(y^s)$. 因而对于 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 和 $0 \leqslant s \leqslant \delta$, z_t^s 满足条件 (2). 令 a 是这种 δ 的上确界. 为了证明 $a = s_0$, 假设 $a < s_0$. 首先证明对于 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 和 $0 \leqslant s \leqslant a$, z_t^s 满足条件 (2). 因为 z_t^s 对 (t, s) 是可微的, 所以沿曲线 $z_t^{(a)}$ 的平移是沿曲线 $z_t^{(s)}$ 的平移当 $s \uparrow a$ 时的极限 (参看第二章定理 4.2 的引理). 因而条件 (a) 满足. 同样有 $\dot{z}_{(t)}^a = \lim\limits_{s\uparrow a} \dot{z}_{(t)}^s$ 和 $\dot{z}_t^{(a)} = \lim\limits_{s\uparrow a} \dot{z}_t^{(s)}$. 结合上面的极限论证就得出对于 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 和 $s = a$, 条件 (b) 和 (c) 满足.

为了证明当 s 超过 a 值时 z_t^s 满足性质 (2), 将引理 3 应用于 T' 曲线 $\tau^{(a)} = z_t^{(a)}$ 和 T'' 测地线 y^u, 其中 $u = s - a$. 那么可以看出存在一个 $r > 0$ 和一个同伦 $w_t^u (0 \leqslant t \leqslant 1, -r \leqslant u \leqslant r)$ 满足类似于 (2) 的条件使得 $w_t^{(0)} = z_t^{(a)}$ 且 $w_0^u = y^u$. 因为 $\dot{w}_t^{(0)}$ 沿曲线 $w_t^{(0)} = z_t^{(a)}$ 平行于 $\dot{y}^a$. 由此可知对于 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 和 $a - r \leqslant s \leqslant a + r$, $z_t^s = w_t^{s-a}$. 这证明对于 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 和 $0 \leqslant s \leqslant a + r$, z_t^s 满足条件 (2). 但这与 $a < s_0$ 的假设矛盾.

引理 5 沿用引理 4 的记号, 曲线 $\tau' \cdot \tau''^{-1}$ 在 $M'(y^{s_0})$ 上的射影与 $\tau^{(s_0)} = z_t^{(s_0)} (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 一致.

引理 5 的证明 因为 τ''^{-1} 是 T'' 曲线, 所以它在 $M'(y^{s_0})$ 中的射影是平凡的, 即退化为一点 y^{s_0}. 条件 (a) 和 (b) 蕴涵着对于每个 t, $\dot{x}_t$ 沿 $\tau'' \cdot \tau'^{-1}$ 到 y^{s_0} 的平移与 $\dot{z}_t^{(s_0)}$ 沿 $z_t^{(s_0)}$ 到 y^{s_0} 的平移是相同的. 这就意味着 $\tau'' \cdot \tau'^{-1}$ 投影到 $\tau^{(s_0)}$ 上.

现在来叙述证明定理 6.1 的主要步骤.

引理 6 如果 M 中从 0 到 z 点的两条曲线 τ_1 和 τ_2 是相互同伦的, 那么它们在 $M' = M'(0)$ 中的射影具有相同的端点.

引理 6 的证明 我们首先指出 τ_2 是从 τ_1 经过有限次相继小变形而得到的. 在这里曲线 z_t 的小变形是指对于某个小邻域 V, 将曲线在 V 中的部分 $z_t (t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ 用 V 中满足 $w_{t_1} = z_{t_1}$ 和 $w_{t_2} = z_{t_2}$ 的曲线段 $w_t (t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ 来代替. 作为这里的邻域 V, 我们总是像引理 2 中那样取形如 $V' \times V''$ 的邻域.

因此只需证明下列论断即可. 令 τ 是从 0 到 z_1 的一条曲线, μ 是从 z_1 到 z_2 的一条曲线而且是在一个小邻域 $V = V' \times V''$ 中, 而 κ 是从 z_2 到 z 的一条曲线.

令 ν 是 V 中从 z_1 到 z_2 的另一条曲线. 那么 $\kappa\cdot\mu\cdot\tau$ 和 $\kappa\cdot\nu\cdot\tau$ 在 M' 中的射影有相同的端点.

为了证明这一论断, 首先由引理 1, 我们可以将曲线 κ 用它在 $M'(z_2)$ 中的射影来代替. 因而可假设 κ 是一条 T' 曲线. 将 μ 用 $V=V'\times V''$ 中的序对 (μ',μ'') 表示. 由引理 2, μ 在 $M'(z_1)$ 中的射影是 μ'. 令 μ^* 是 V 中连接 z_2 和 μ' 的终点的一条 T'' 测地线. z_2 点的 T' 向量沿 μ^{-1} 的平移与沿 $\mu'^{-1}\cdot\mu^*$ 的平移是相同的, 因为 μ'' 和 μ^* 对于 T' 向量给出相同的平移. 由引理 5 可以看出 $\kappa\cdot\mu$ 在 $M'(z_1)$ 上的射影是由曲线 μ' 后接通过利用 T'' 测地线 μ^* 和 T' 曲线 κ 构造的同伦 z_t^s 而得到的曲线 κ' 组成的. 同伦 z_t^s 只依赖于 μ^* 和 κ 而不依赖于 μ. 因而若在上面的论证中用 ν 代替 μ, 则可以看出 $\kappa\cdot\nu$ 的射影为 ν' 后接 κ', 其中 $\nu=(\nu',\nu'')$ 在 $V=V'\times V''$ 中.

现在我们将 τ 划分为有限个弧段 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_k$ 且使得每个 τ_i 在一个形如 $V_i'\times V_i''$ 的小邻域 V_i 中. 然后证明曲线 $\kappa'\cdot\mu'\cdot\tau_k$ 和 $\kappa'\cdot\nu'\cdot\tau_k$ 在 T' 的过 τ_k 的始点的极大积分流形中有相同的终点. 仍然令 $\tau_k=(\tau_k',\tau_k'')$ 在 $V_k=(V_k',V_k'')$ 中, 再令 τ_k^* 是 V_k 中连接 τ_k 的终点和 τ_k' 的终点的测地线. 如前面那样, $\kappa'\cdot\mu'\cdot\tau_k$ 的射影是曲线 τ_k' 后接由从 T'' 测地线 τ_k^* 和 T' 曲线 $\kappa'\cdot\mu'$ 构造的同伦而得到的曲线. 对于 $\kappa'\cdot\nu'\cdot\tau_k$ 的射影是类似的. 每个同伦都是由测地线 τ_k^* 的初始切向量沿着 $\kappa'\cdot\mu'$ 或者沿 $\kappa'\cdot\nu'$ 平行移动而构造的. 因为 $\nu'^{-1}\cdot\mu'$ 是 V' 中的曲线, 所以对 T'' 向量而言, 沿 $\nu'^{-1}\cdot\mu'$ 的平移是平凡的. 这意味着 τ_k^* 的初始切向量沿着 μ' 和 ν' 的平移是相同的, 所以两个同伦产生从 τ_k' 的终点出发并且终止于同一点的两条曲线 μ_k 和 ν_k, 这里 κ_k 是这样一条曲线, 它使得 $\kappa_k\cdot\mu_k\cdot\tau_k'$ 和 $\kappa_k\cdot\nu_k\cdot\tau_k'$ 分别是 $\kappa'\cdot\mu'\cdot\tau_k$ 和 $\kappa'\cdot\nu'\cdot\tau_k$ 的射影. 我们还注意到每个 T'' 向量沿 μ_k 和 ν_k 的平移是相同的, 实际上这是引理 4 中同伦的性质 (a) 的结果.

我们继续进行下一个步骤, 用同样的方法投影曲线 $\kappa_k\cdot\mu_k\cdot\tau_k'\cdot\tau_{k-1}$ 和 $\kappa_k\cdot\nu_k\cdot\tau_k'\cdot\tau_{k-1}$. 作为上面评注的结果, 则得到终止于同一点的两条曲线. 显然这个过程可以继续进行下去, 因而就完成了引理 6 的证明.

现在我们已经有条件来完成定理 6.1 的证明.

引理 6 容许我们定义一个从 M 到 M' 的映射 p'. 类似地可定义一个从 M 到 M'' 的映射 p''. 这些映射都是可微的. 正如我们在引理 1 之前所指出的那样, 只需证明从 M 到 $M'\times M''$ 的映射 $p=(p',p'')$ 在每一点都是等距映射. 令 z 为 M 的任意点并且 τ 是从 0 到 z 的一条曲线. 对任何切向量 $Z\in T_z(M)$, 令 $Z=X+Y$, 其中 $X\in T_z'$, $Y\in T_z''$. 由射影的定义, 显然 $p'(Z)$ 与通过将 X 从 z 到 0 沿 τ 平移然后再从 0 到 $p'(z)$ 沿 $p'(\tau)$ 平移所得到的向量是相同的. 因此 $p'(Z)$ 和 X 具有相同的长度. 类似地, $p''(Z)$ 和 Y 有相同的长度. 由此可知 Z 和 $p(Z)=(p'(Z),p''(Z))$ 具有相同的长度. 这证明 p 在 z 点是等距映射. 证毕.

联合定理 5.4 和定理 6.1 就得到 de Rham 分解定理.

定理 6.2 一个连通且单连通的完备 Riemann 流形 M 等距同构于直积 $M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_k$, 其中 M_0 是一个 Euclid 空间 (可能是 0 维的) 并且 $M_1, \cdots, M_k$ 都是单连通的不可约的完备 Riemann 流形. 这种分解在不计因子次序的条件下是唯一的.

定理 6.1 和 6.2 归功于 de Rham[1]. 定理 6.1 的证明是新的, 是受 Reinhart[1] 的成果的启发而得到的.

4.7 仿射和乐群

令 M 是一个连通的 Riemann 流形. 固定 M 的一点 x, 将仿射和乐群 $\Phi(x)$ 与线性和乐群 $\Psi(x)$ 分别简记为 Φ 和 Ψ. 已经知道 (参看定理 5.5) 限制线性和乐群 Ψ^0 是 $S^0(n)$ 的一个闭子群, 其中 $n = \dim\ M$; Φ 是仿射切空间 (或者更确地说是 Euclid 切空间)$T_x(M)$ 的 Euclid 运动群.

我们首先证明下列结果.

定理 7.1 如果 Ψ^0 是不可约的, 那么, 或者

(1) Φ^0 包含 $T_x(M)$ 的所有平移, 或者

(2) Φ^0 使 $T_x(M)$ 的一点成为不动点.

证明 令 K 是从 Φ^0 到 Ψ^0 的同态核 (参看第三章命题 3.5). 因为 K 是 Φ^0 的正规子群, 又因为 Φ^0 的每个元素 a 都具有 $a = \xi \cdot \tilde{a}$ 的形式, 其中 $\tilde{a} \in \Psi^0$ 而 ξ 是一个纯平移, Ψ^0 使 K 正规化, 即对每个 $\tilde{a} \in \Psi^0$ 都有 $\tilde{a}^{-1}K\tilde{a} = K$. 首先考虑 K 为非离散的情况. 由于 Ψ^0 是连通的, 因而它使 K 的单位分支 K^0 正规化. 令 V 是 $T_x(M)$ 的原点在 K^0 作用下的轨道, 它是 $T_x(M)$ 的一个在 Ψ^0 作用下不变的非平凡线性子空间; 而在 Ψ^0 作用下的不变性是 Ψ^0 使 K^0 正规化的一个推论. 因为由假设 Ψ^0 是不可约的, 所以 $V = T_x(M)$. 这意味着 Φ^0 包含 $T_x(M)$ 的所有平移. 其次再考虑 K 为离散的情况. 因为 Ψ^0 是连通的, 所以 Ψ^0 与 K 是按元素可交换的. 从而对每个 $\xi \in K$, $\xi(0)$ 是经 Ψ^0 作用不变的 (其中 0 表示 $T_x(M)$ 的原点). 因为 Ψ^0 是不可约的, 所以对每个 $\xi \in K$ 都有 $\xi(0) = 0$. 这意味着 K 只包含单位元, 因此 Φ^0 自然同构于 Ψ^0. 另一方面, $T_x(M)$ 的任何紧仿射变换群都有一个不动点. 虽然我们在第二卷中将证明一个更一般的结论, 但是在这里仍然给出这个事实的一种直接证明. 令 f 是一个由

$$f(a) = a(0), \quad a \in \Phi^0$$

定义的从 Φ^0 到 $T_x(M)$ 的映射. 令 da 是一个双不变的 Haar 测度并且定义

$$X_0 = \int f(a)da.$$

容易验证 X_0 是 Φ^0 的不动点. 证毕.

现在我们来研究定理 7.1 的第二种情况 (未假定 M 的不可约性).

定理 7.2 令 M 是一个连通且单连通的完备 Riemann 流形, 若在某一点 x 的 (限制) 仿射和乐群 Φ^0 使 Euclid 切空间 $T_x(M)$ 的一点成为不动点, 那么 M 等距同构于一个 Euclid 空间.

证明 假设 $X_0 \in T_x(M)$ 是一个在 Φ^0 作用下的不动点, 令 τ 是从 x 到某一点 y 的一条测地线而且能被展开到线段 $tX_0 (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 上. 我们注意到 y 点的仿射和乐群 $\Phi^0(y)$ 使 $T_y(M)$ 的原点为不动点. 事实上, 对于 y 点的任何闭曲线 μ, 沿 $\tau^{-1} \cdot \mu \cdot \tau$ 的仿射平移将 X_0 映射成其自身, 即 $(\tau^{-1} \cdot \mu \cdot \tau) X_0 = X_0$. 因此由 $\tau(X_0)$ 给出的 $T_y(M)$ 的原点在 μ 作用下不动. 这说明我们可以假设 Φ^0 使 $T_x(M)$ 的原点固定不动. 因为 M 是完备的, 所以指数映射 $T_x(M) \to M$ 是满射. 现在证明它是一一的. 假设从 x 点出发的两条测线 τ 和 μ 相交于一点 $y \neq x$. 仿射平移 $\mu^{-1} \cdot \tau$ 将 $T_x(M)$ 的原点 O_x 映射到其自身. 从而有

$$\tau^{-1}(O_y) = \mu^{-1}(O_y),$$

其中 O_y 表示 $T_y(M)$ 的原点. 因为 $\tau^{-1}(O_y)$ 和 $\mu^{-1}(O_y)$ 分别是 τ 和 μ 在 $T_x(M)$ 中展开的终点. 所以这些展开是互相重合的线段. 因而 $\tau = \mu$, 但这与 $x \neq y$ 的假设相矛盾. 这证明指数映射 $T_x(M) \to M$ 是一一的. 证毕.

假设 $\exp_x$ 是从 $N(x;r) = \{X \in T_x(M); \|X\| < r\}$ 到 $U(x;r) = \{y \in M; d(x,y) < r\}$ 的微分同胚, 令 $x^1, \cdots, x^n$ 是 $U(x;r)$ 上的法坐标系.

置 $X = -\sum\limits_i^n x^i (\partial/\partial x^i)$ 并且令 p 是相应的点场 (参看第三章 3.4 节). 现在证明 p 是一个平行点场. 因为 Φ^0 使 $T_x(M)$ 的原点不动, 所以只需证明 p 沿过 x 点的每一条测地线都是平行的. 从而要证明的论断可从下列引理得出.

引理 1 令 $\tau = x_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是 Riemann 流形 M 中的一条曲线, 令 $\tilde{\tau}_s^t$(相应地 τ_s^t) 表示沿曲线 τ 从 x_t 到 x_s 的仿射 (线性) 平移. 那么

$$\tilde{\tau}_0^t(Y) = \tau_0^t(Y) + C_t, \quad Y \in T_{x_t}(M),$$

其中 $C_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是 $\tau = x_t$ 到 $T_{x_0}(M)$ 中的展开.

引理 1 的证明 给定 $Y \in T_{x_t}(M)$, 令 p(相应地 q) 是沿着 τ 由 Y(相应地, $T_{x_t}(M)$ 的原点) 的仿射平移定义的点场, 令 Y^* 是沿 τ 由 Y 的线性平移定义的向量场. 那么在 τ 的每一点处 $p = q + Y^*$, 即在 τ 的每一点, Y^* 是以 q 为始点以 p 为终点的向量. 在 x_0 点, 这恰好意味着 $\tilde{\tau}_0^t(Y) = \tau_0^t(Y) + C_t$.

回到定理 7.2 的证明, 则可以断言对任何向量场 V,

$$\nabla_V X + V = 0.$$

而这又是下列引理的结论.

引理 2 令 p 是 Riemann 流形 M 中沿曲线 $\tau = x_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 的一个点场, 令 X 是沿 τ 的相应向量场. 那么 p 是平行点场当且仅当

$$\nabla_{\dot{x}_t} X + \dot{x}_t = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

引理 2 的证明 从引理 1 得

$$\tilde{\tau}_t^{t+h}(p_{x_{t+h}}) = \tau_t^{t+h}(X_{x_{t+h}}) + C_{t,h},$$

其中 $C_{t,h}$(对于固定的 t 和参数 h) 是 τ 在 $T_{x_t}(M)$ 中的展开. 因为 $\tilde{\tau}_t^{t+h}(p_{x_{t+h}})$ 不依赖于 h(而只依赖于 t) 当且仅当 p 是平行的, 所以

$$\begin{aligned}0 =& \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\tau_t^{t+h}(X_{x_{t+h}}) - X_{x_t}] + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} C_{t,h} \\ =& \nabla_{\dot{x}_t} X + \dot{x}_t\end{aligned}$$

对于 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 成立当且仅当 p 是平行的, 这就完成了引理 2 的证明.

令 Y 和 Z 是 M 上的任意向量场. 从 $\nabla_Y X + Y = 0$ 和 $\nabla_Z X + Z = 0$ 得到 (参看第三章定理 5.1)

$$\begin{aligned}\nabla_X Y =& \nabla_Y X + [X, Y] = -Y + [X, Y], \\ \nabla_X Z =& \nabla_Z X + [X, Z] = -Z + [X, Z].\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}X(g(Y, Z)) =& g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ =& -2g(Y, Z) + g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]).\end{aligned}$$

对于任何固定的 j 和 k, 令 $Y = \partial/\partial x^j$ 和 $Z = \partial/\partial x^k$. 那么就有

$$X \cdot g_{jk} = -2g_{jk} + g_{jk} + g_{jk} = 0.$$

这就意味着函数 g_{jk} 在由 X 生成的局部单参数变换群 φ_t 作用下是不变的. 但是 φ_t 具有下列形式

$$\varphi_t(x^1, \cdots, x^n) = (e^{-t}x^1, \cdots, e^{-t}x^n).$$

因而各函数 g_{jk} 沿过 x 的每一条测地线均为常数. 从而在 $U(x; r)$ 的每一点处

$$g_{jk} = g_{jk}(x) = \delta_{jk}.$$

这说明 $\exp_x$ 是从 $N(x;r)$ 到 $U(x;r)$ 上关于 Euclid 度量的等距映射. 令 r_0 是使得 $\exp_x$ 是从 $N(x;r)$ 到 $U(x;r)$ 的微分同胚的 $r>0$ 的上确界. 因为在 $N(x;r_0)$ 的每一点上, 微分 $(\exp_x)_*$ 都是非奇异的, 所以 $\exp_x$ 是从 $N(x;r_0)$ 到 $U(x;r_0)$ 上的微分同胚, 从而由上面的论证它又是一个等距映射. 如果 $r_0<\infty$, 那么由此可知, $(\exp_x)_*$ 在 $N(x;r)$ 的每一个边界点 y 处是等距的, 因而在这种点 y 的一个邻域内是非奇异的. 由于 $N(x;r_0)$ 的边界是紧的, 因而可知存在 $\varepsilon>0$ 使得 $\exp_x$ 是从 $N(x;r_0+\varepsilon)$ 到 $U(x;r_0+\varepsilon)$ 的微分同胚, 但这与 r_0 的定义矛盾. 这就证明 $\exp_x$ 是从 $T_x(M)$ 到 M 上的微分同胚. 通过在整个 M 上选取一个法坐标系 $x^1,\cdots,x^n$, 则可以断定在 M 的每一点都有 $g_{jk}=\delta_{jk}$, 即 M 是一个 Euclid 空间.　证毕.

作为结论我们可以得出下列属于 Goto 和 Sasaki[1] 的推论.

推论 7.3　令 M 是一个连通的完备 Riemann 流形. 若对于某个 $x\in M$, 限制仿射和乐群 $\Phi^0(x)$ 使 Euclid 切空间 $T_x(M)$ 的一点成为不动点, 那么 M 是局部 Euclid 的 (即 M 的每一点都有一个邻域等距同构于 Euclid 空间的一个开子集).

证明　将定理 7.2 应用于 M 的万有覆盖空间.　证毕.

推论 7.4　如果 M 是一个维数 >1 的完备 Riemann 空间并且限制线性和乐群 $\Psi^0(x)$ 是不可约的. 那么限制仿射和乐群 $\Phi^0(x)$ 包含 $T_x(M)$ 的所有平移.

证明　因为 $\Psi^0(x)$ 是不可约的, 所以 M 不是局部 Euclid 的. 于是我们的论断可从定理 7.1 和推论 7.3 得出.　证毕.

第五章　曲率形式和空间形式

5.1　代数预备知识

令 V 是一个 n 维实向量空间且 $R: V\times V\times V\times V\to \mathbf{R}$ 是一个满足下列三个条件的四重线性映射:

(a) $R(v_1,v_2,v_3,v_4)=-R(v_2,v_1,v_3,v_4)$

(b) $R(v_1,v_2,v_3,v_4)=-R(v_1,v_2,v_4,v_3)$

(c) $R(v_1,v_2,v_3,v_4)+R(v_1,v_3,v_4,v_2)+R(v_1,v_4,v_2,v_3)=0.$

命题 1.1　若 R 具有上述三个性质, 那么它也具有下列第四个性质:

(d) $R(v_1,v_2,v_3,v_4)=R(v_3,v_4,v_1,v_2).$

证明　用 $S(v_1,v_2,v_3,v_4)$ 表示 (c) 式的左边. 由直接计算得

$$\begin{aligned}0=&S(v_1,v_2,v_3,v_4)-S(v_2,v_3,v_4,v_1)-S(v_3,v_4,v_1,v_2)\\&+S(v_4,v_1,v_2,v_3)\\=&R(v_1,v_2,v_3,v_4)-R(v_2,v_1,v_3,v_4)-R(v_3,v_4,v_1,v_2)\\&+R(v_4,v_3,v_1,v_2).\end{aligned}$$

应用 (a) 和 (b), 可以看出

$$2R(v_1,v_2,v_3,v_4)-2R(v_3,v_4,v_1,v_2)=0.\quad \text{证毕.}$$

命题 1.2　令 R 和 T 是满足上面的性质 (a), (b), (c) 的两个四重线性映射, 若对所有 $v_1,v_2\in V$,

$$R(v_1,v_2,v_1,v_2)=T(v_1,v_2,v_1,v_2).$$

那么 $R=T$.

证明　可以假设 $T=0$; 考虑 $R-T$ 和 0 以代替 R 和 T. 因此假设对所有 $v_1,v_2\in V$, $R(v_1,v_2,v_1,v_2)=0$, 则有

$$\begin{aligned}0=&R(v_1,v_2+v_4,v_1,v_2+v_4)\\=&R(v_1,v_2,v_1,v_4)+R(v_1,v_4,v_1,v_2)\\=&2R(v_1,v_2,v_1,v_4).\end{aligned}$$

从而对所有 $v_1, v_2, v_4 \in V$,

(1) $$R(v_1, v_2, v_1, v_4) = 0.$$

从 (1) 式得

$$\begin{aligned} 0 =& R(v_1 + v_3, v_2, v_1 + v_3, v_4) \\ =& R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_3, v_2, v_1, v_4). \end{aligned}$$

于是通过应用 (d), 然后再用 (b), 则得

$$\begin{aligned} 0 =& R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_4, v_3, v_2) \\ =& R(v_1, v_2, v_3, v_4) - R(v_1, v_4, v_2, v_3). \end{aligned}$$

从而对所有 $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$,

(2) $$R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_1, v_4, v_2, v_3).$$

分别以 v_3, v_4, v_2 代替 v_2, v_3, v_4, 则得到对所有 $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$,

(3) $$R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_1, v_3, v_4, v_2).$$

从 (2) 和 (3) 得到

$$\begin{aligned} 3R(v_1, v_2, v_3, v_4) =& R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) \\ &+ R(v_1, v_4, v_2, v_3), \end{aligned}$$

其中由 (c) 可知上式右边为零. 从而对所有 $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$,

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4) = 0. \quad \text{证毕.}$$

除了四重线性映射 R 之外, 我们还要考虑 V 上的内积 (即正定对称的双线性形式), 并且记为 $(\ , \ )$. 令 p 是 V 中的一个平面 (即一个 2 维子空间) 并且令 v_1 和 v_2 是 p 的规范正交基. 置

$$K(p) = R(v_1, v_2, v_1, v_2).$$

正如记号所暗示的那样, $K(p)$ 不依赖于 p 的规范正交基的选取. 实际上, 若 w_1 和 w_2 构成 p 的另一个规范正交基, 那么

$$w_1 = av_1 + bv_2, \quad w_2 = -bv_1 + av_2 (\text{或者} bv_1 - av_2),$$

其中 a 和 b 是满足 $a^2 + b^2 = 1$ 的实数. 利用 (a) 和 (b) 容易得出 $R(v_1, v_2, v_1, v_2) = R(w_1, w_2, w_1, w_2)$.

命题 1.3 令 v_1, v_2 是 V 中一个平面的基 (不必是规范正交的), 那么

$$K(p) = \frac{R(v_1, v_2, v_1, v_2)}{(v_1, v_1)(v_2, v_2) - (v_1, v_2)^2}.$$

证明 使用 p 的下列规范正交基即可得出上述公式:

$$v_1/(v_1,v_1)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{a}[(v_1,v_1)v_2-(v_1,v_2)v_1]$$

其中 $a=[(v_1,v_1)((v_1,v_1)(v_2,v_2)-(v_1,v_2)^2)]^{\frac{1}{2}}$. 证毕.

对于 $v_1,v_2,v_3,v_4\in V$, 置

$$R_1(v_1,v_2,v_3,v_4)=(v_1,v_3)(v_2,v_4)-(v_2,v_3)(v_4,v_1),$$

则可平凡地验证 R_1 是一个具有性质 (a)、(b)、(c) 的四重线性映射而且对于 V 中的平面 p, 有

$$K_1(p)=R_1(v_1,v_2,v_1,v_2)=1,$$

其中 v_1,v_2 是 p 的规范正交基.

命题 1.4 令 R 是一个满足性质 (a)、(b)、(c) 的四重线性映射. 若对所有平面 p, $K(p)=c$, 那么 $R=cR_1$.

证明 由命题 1.3, 对所有 $v_1,v_2\in V$, 有

$$R(v_1,v_2,v_1,v_2)=cR_1(v_1,v_2,v_1,v_2).$$

将命题 1.2 应用于 R 和 cR_1, 则推出 $R=cR_1$. 证毕.

令 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 关于内积 $(\ ,\ )$ 的规范正交基. 对于每个具有性质 (a)、(b)、(c) 的四重线性映射 R, 使之伴随 V 上的一个对称双线性形式 S 如下:

$$\begin{aligned}S(v_1,v_2)=&R(e_1,v_2,e_1,v_2)+R(e_2,v_1,e_2,v_2)+\cdots\\&+R(e_n,v_1,e_n,v_2),\quad v_1,v_2\in V.\end{aligned}$$

容易验证 S 不依赖于规范正交基 $e_1,\cdots,e_n$ 的选取. 从 S 的定义可以得出下列命题.

命题 1.5 令 $v\in V$ 是一个单位向量并且令 $v,e_2,\cdots,e_n$ 是 V 的规范正交基. 那么

$$S(v,v)=K(p_2)+\cdots+K(p_n),$$

其中 p_i 是由 v 和 e_i 张成的平面.

5.2 截 曲 率

令 M 是一个带度量张量 g 的 n 维 Riemann 流形. 令 $R(X,Y)$ 表示由 $X,Y\in T_x(M)$ 决定的 $T_x(M)$ 的曲率变换 (参看第三章 3.5 节). M 的 Riemann 曲率张量

场 (也记为 R) 是由下式定义的 4 阶协变张量场:

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_3, X_4)X_2, X_1),\ X_i \in T_x(M),\ i = 1, \cdots, 4.$$

命题 2.1　在 M 的每一点 x 处看作四重线性映射 $T_x(M) \times T_x(M) \times T_x(M) \times T_x(M) \to \mathbf{R}$ 的 Riemann 曲率张量具有 5.1 节的性质 (a), (b), (c), 从而也具有性质 (d).

证明　令 u 是规范正交标架丛 $O(M)$ 中使得 $\pi(u) = x$ 的任何点. 令 $X_3^*, X_4^* \in T_u(O(M))$ 满足 $\pi(X_3^*) = x_3$ 和 $\pi(X_4^*) = X_4$. 从第三章 3.5 节给出的曲率变换 $R(X_3, X_4)$ 的定义可得

$$\begin{aligned} g(R(X_3, X_4)X_2, X_1) =& g(u[2\Omega(X_3^*, X_4^*)(u^{-1}X_2)], X_1) \\ =& ((2\Omega(X_3^*, X_4^*)(u^{-1}X_2), u^{-1}X_1), \end{aligned}$$

其中 (,) 是 $\mathbf{R}^n$ 中的自然内积. 于是可以看出性质 (a) 是下列事实的推论: $\Omega(X_3^*, X_4^*) \in \mathfrak{o}(n)$ 是一个反对称矩阵. 性质 (b) 可从 $R(X_3, X_4) = -R(X_4, X_3)$ 得出. 最后, 性质 (c) 是第三章定理 5.3 中给出的 Bianchi 第一恒等式的推论.　证毕.

对于切空间 $T_x(M)$ 中的每个平面 p, 其截面率 $K(p)$ 定义为

$$K(p) = R(X_1, X_2, X_1, X_2) = g(R(X_1, X_2)X_2, X_1),$$

其中 X_1, X_2 是 p 的规范正交基. 正如我们在 5.1 节中所看到的那样, $K(p)$ 不依赖于规范正交基 X_1, X_2 的选取. 命题 1.2 蕴涵着对 $T_x(M)$ 中的所有平面 p, $K(p)$ 取值的集合决定 x 点的 Riemann 曲率张量.

若对所有点 $x \in M$ 和 $T_x(M)$ 中的所有平面 p, $K(p)$ 都是一个常数, 则将 M 称为常曲率空间. 下列定理归功于 F.Schur[1].

定理 2.2　令 M 是一个维数 $\geqslant 3$ 的连通 Riemann 流形. 如果截曲率 $K(p)$(其中 p 为 $T_x(M)$ 中的平面) 只依赖于 x, 则 M 为常曲率空间.

证明　定义一个 4 阶协变张量场 R_1 如下:

$$R_1(W, Z, X, Y) = g(W, X)g(Z, Y) - g(Z, X)g(Y, W),\ W, Z, X, Y \in T_x(M).$$

由命题 1.4, 有

$$R = kR_1,$$

其中 k 是 M 上的函数. 因为 g 是平行的, 所以 R_1 也是平行的. 从而对任何 $U \in T_x(M)$,

$$(\nabla_U R)(W, Z, X, Y) = (\nabla_U k)R_1(W, Z, X, Y).$$

这意味着对任何 $X, Y, Z, U \in T_x(M)$ 皆有下式成立:

$$[(\nabla_U R)(X,Y)]Z = (Uk)(g(Z,Y)X - g(Z,X)Y).$$

考虑上列恒等式关于 (U, X, Y) 的循环和. 由 Bianchi 第二恒等式 (第三章定理 5.3) 得其左边为零. 因而有

$$\begin{aligned}0 =&(Uk)(g(Z,Y)X - g(Z,X)Y)\\&+ (Xk)(g(Z,U)Y - g(Z,Y)U)\\&+ (Yk)(g(Z,X)U - g(Z,U)X).\end{aligned}$$

对任意一个 X, 我们以这样的方式选取 Y, Z, U : 使 X, Y, Z 相互正交并且 $U = Z$ 满足 $g(Z, Z) = 1$. 这是可能的, 因为 $\dim\ M \geqslant 3$. 于是得

$$(Xk)Y - (Yk)X = 0.$$

因为 X 和 Y 是线性无关的, 所以有 $Xk = Yk = 0$. 这说明 k 是一个常数. 证毕.

推论 2.3 对一个具有常曲率 k 的空间, 有

$$R(X,Y)Z = k(g(Z,Y)X - g(Z,X)Y).$$

这是我们在定理 2.2 的证明过程中所建立的.

若 k 是一个正常数 (或负常数), 则 M 称为常正曲率空间 (相应为常负曲率空间).

如果 R^i_{jkl} 和 g_{ij} 分别是曲率张量和度量张量关于某个局部坐标系的分量 (参看第三章 3.7 节), 那么 Riemann 曲率张量的分量 R_{ijkl} 由下式给出

$$R_{ijkl} = \sum_m g_{im} R^m_{jkl}.$$

若 M 是一个常曲率空间且 $K(p) = k$, 那么

$$R_{ijkl} = k(g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{li}), \quad R^i_{jkl} = k(\delta^i_k g_{jl} - g_{jk}\delta^i_l).$$

如同在第三章 3.7 节中那样, 用

$$\Omega^i_j = \sum_{k,l} \frac{1}{2} \tilde{R}^i_{jkl} \theta^k \wedge \theta^l$$

定义 $L(M)$ 上的一组函数 $\tilde{R}^i_{jkl}$, 其中 $\Omega = (\Omega^i_j)$ 是 Riemann 联络的曲率形式. 对 $O(M)$ 的任意一点 u, 选取一个以 $x = \pi(u)$ 为原点的局部坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 使得 u 是由 $(\partial/\partial x^1)_x, \cdots, (\partial/\partial x^n)_x$ 给出的标架. 关于这个坐标系在 x 点有

$$g_{ij} = \delta_{ij},$$

从而在 x 点有

$$R^i_{jkl} = R_{ijkl} = k(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{li}).$$

令 σ 是由线性标架场 $\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^n$ 给出的 $L(M)$ 的局部截面. 正如在第三章 3.7 节中所证明的那样, $\sigma^*\tilde{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl}$. 从而在 u 点有

$$\begin{aligned}\tilde{R}^i_{jkl} =& k(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{li}),\\ \Omega^i_j =& k\theta^i \wedge \theta^j.\end{aligned}$$

因为 u 是 $O(M)$ 的任意一点, 故有下列命题成立.

命题 2.4 若 M 是截曲率为 k 的常曲率空间, 那么在 $O(M)$ 上曲率形式 $\Omega = (\Omega^i_j)$ 由下式给出

$$\Omega^i_j = k\theta^i \wedge \theta^j,$$

其中 $\theta = (\theta^i)$ 是 $O(M)$ 上的标准形式.

5.3 常曲率空间

本节我们将对每个常数 k 构造一个以 k 为截曲率的单连通的完备的常曲率空间, 也就是要证明下列定理.

定理 3.1 令 $(x^1, \cdots, x^n, t)$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的坐标系并且 M 是由下式定义的 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的超曲面:

$$(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 + rt^2 = r \quad (r\text{是一个非零常数}).$$

令 g 是通过将下列形式限制在 M 上而得到的 M 的 Riemann 度量:

$$(dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2 + rdt^2.$$

那么

(1) M 是一个截面率为 $1/r$ 的常曲率空间.

(2) 使二次型 $(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 + rt^2$ 不变的 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的线性变换群 G 可作为 M 的等距变换群可迁地作用在 M 上.

(3) 若 $r > 0$, 则 M 等距同构于半径为 $r^{\frac{1}{2}}$ 的球面; 若 $r < 0$, 则 M 是由两个互相等距同构的连通流形组成的并且其中的每一个都微分同胚于 $\mathbf{R}^n$.

证明 首先注意到 M 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的闭子流形 (参看第一章例 1.1), 验证工作留给读者. 证毕.

我们从证明 (3) 开始. 若 $r > 0$, 则置 $x^{n+1} = r^{\frac{1}{2}}t$. 那么 M 由

$$(x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = r$$

给出并且度量 g 是 $(dx^1)^2+\cdots+(dx^{n+1})^2$ 在 M 上的限制. 这意味着 M 等距同构于半径为 $r^{\frac{1}{2}}$ 的球面. 若 $r<0$, 那么在 M 的每一点处 $t^2\geqslant 1$. 令 M' 和 M'' 分别是 M 中适合 $t\geqslant 1$ 和 $t\leqslant -1$ 的点集. 由

$$y^i=x^i/t,\quad i=1,\cdots,n$$

定义的映射 $(x^1,\cdots,x^n,t)\to(y^1,\cdots,y^n)$ 是从 M'(或 M'') 到由

$$\sum_{i=1}^n (y^i)^2+r<0$$

定义的 $\mathbf{R}^n$ 的开子集上的微分同胚. 事实上, 其逆映射由下式给出:

$$\begin{aligned}x^i&=y^it,\ i=1,\cdots,n,\\ t&=\pm\left(\frac{r}{r+\sum_i (y^i)^2}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

直接计算表明度量 g 可以用 $y^1,\cdots,y^n$ 表示如下:

$$\frac{r[(r+\sum_i (y^i)^2)(\sum_i (dy^i)^2)-(\sum_i y^idy^i)^2]}{(r+\sum_i (y^i)^2)^2}.$$

为了证明 (2), 首先把 G 看成作用在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上的群. 因为 G 是一个使 $(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2+rt^2$ 不变的线性群, 所以它也使形式 $(dx^1)^2+\cdots+(dx^n)^2+rdt^2$ 保持不变. 因而当看成作用于 M 上的群时, G 是 Riemann 流形 M 的等距变换群. G 在 M 上的可迁性是 Witt 定理的一个结论. 该定理可以叙述如下.

令 Q 是向量空间 V 上的非退化二次型. 若 f 是从 V 的子空间 U 到 V 中的一一线性映射且使得 $Q(f(x))=Q(x)$ 对所有 $x\in U$ 成立, 那么 f 能够扩张成 V 到其自身的线性同构并且使得 $Q(f(x))=Q(x)$ 对所有 $x\in V$ 成立. 特别, 若 x_0 和 x_1 是 V 中适合 $Q(x_0)=Q(x_1)$ 的两个元素, 则有 V 到其自身的线性同构 f 使 Q 不变并且将 x_0 映射成 x_1.

至于 Witt 定理的证明可以参看 Artin[1. p. 121].

最后来证明 (1). 令 H 是 G 的一个子群, 它是由使得以 $(0,\cdots,0,1)$ 为坐标的点 O 为不动点的变换组成的. 定义一个映射 $f:G\to O(M)$ 如下. 令 $u_0\in O(M)$ 是在点 $O=(0,\cdots,0,1)\in M$ 处由 $(\partial/\partial x^1)_0,\cdots,(\partial/\partial x^n)_0$ 给出的标架. 每一个元素 $a\in G$, 作为 M 的等距变换将 M 的每个规范正交标架仍然映射为规范正交标架. 特别, $a(u_0)$ 是 M 在 $a(0)$ 点的规范正交标架. 定义

$$f(a)=a(u_0),\quad a\in G.$$

引理 1　映射 $f: G \to O(M)$ 是从主纤维丛 $G(G/H, H)$ 到纤维丛 $O(M)(M, O(n))$ 上的同构.

引理 1 的证明　若把 G 自然地看成 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵群, 则 H 自然同构于 $O(n)$:

$$H = \begin{pmatrix} O(n) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

容易验证对每个 $a \in H = O(n)$, $f: G \to O(M)$ 与右平移 R_a 交换:

$$f(ba) = f(b)\cdot a, \quad b \in G, a \in H = O(n).$$

G 在 M 上的可迁性蕴涵着诱导映射 $f: G/H \to M$ 是微分同胚, 从而 $f: G \to O(M)$ 是丛同构.

定义 M 的二次型由下列 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵给出:

$$Q = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}.$$

一个 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵 a 是 G 的元素当且仅当 ${}^t aQa = Q$, 其中 ${}^t a$ 为 a 的转置, 令

$$a = \begin{pmatrix} X & y \\ {}^t z & w \end{pmatrix},$$

其中 X 为 $n\times n$ 矩阵, y 和 z 是 $\mathbf{R}^n$ 的元素, 而 w 是一个实数. 那么 a 在 G 中的条件可以表为

$${}^t XX + r\cdot z\,{}^t z = I_n, \quad {}^t Xy + r\cdot zw = 0, \ {}^t yy + r\cdot w^2 = r.$$

由此可知, G 的 Lie 代数由下列形式的矩阵构成:

$$\begin{pmatrix} A & b \\ {}^t c & 0 \end{pmatrix},$$

其中 A 是 $n\times n$ 矩阵并且满足 ${}^t A + A = 0$, 而 b 和 c 是 $\mathbf{R}^n$ 中的元素且满足 $b + rc = 0$. 令

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1 & \beta^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^n & \cdots & \alpha_n^n & \beta^n \\ \gamma_1 & \cdots & \gamma_n & 0 \end{pmatrix}$$

是 G 上 (左不变的) 标准 1 形式 (参看第一章 1.4 节), 则有

$$\alpha^i_j + \alpha^j_i = 0, \quad \beta^i + r\nu_i = 0, \quad i, j = 1, \cdots, n.$$

G 的 Maurer-Cartan 方程可表示为

$$d\beta^i = -\sum_k \alpha^i_k \wedge \beta^k,$$
$$d\alpha^i_j = -\sum_k \alpha^i_k \wedge \alpha^k_j - \beta^i \wedge \nu_j, \quad i, j = 1, \cdots, n.$$

引理 2 令 $\theta = (\theta^i)$ 和 $\omega = (\omega^i_j)$ 是 $O(M)$ 上的标准形式和联络形式. 那么

$$f^*\theta^i = \beta^i, \quad f^*\omega^i_j = \alpha^i_j, \quad i, j = 1, \cdots, n.$$

引理 2 的证明 正如我们早已指出的那样, 每个元素 $a \in G$ 诱导 $O(M)$ 的一个变换, 这个变换在同构 $f : G \to O(M)$ 下对应于由 a 在 G 中产生的左平移. 从 θ 的定义容易看出 $\theta = (\theta^i)$ 在由每个 $a \in G$ 诱导的变换作用下是不变的. 另一方面, (β^i) 在由每个 $a \in G$ 产生的左平移之下是不变的. 因此为证明 $f^*\theta^i = \beta^i$, 只需证明 $(f^*\theta^i)(X^*) = \beta^i(X^*)$ 对所有 $X^* \in T_e(G)$. 置 $X_i = (\partial/\partial x^i)$. 因而标架 u_0 是由 $(X_1, \cdots, X_n)$ 给出的. 复合映射 $\pi \circ f : G \to O(M) \to M$ 把 $T_e(G)$(等同于 G 的 Lie 代数) 的形如

$$\begin{pmatrix} A & b \\ {}^tc & 0 \end{pmatrix}$$

的元素映射成向量 $\sum_i b^i X_i \in T_0(M)$, 其中 $b^1, \cdots, b^n$ 是 b 的分量. 因此若 $X^* \in T_e(G)$, 则 $\pi \circ f(X^*) = \sum_i \beta^i(X^*)X_i$, 从而

$$(f^*\theta^1(X^*), \cdots, f^*\theta^n(X^*)) = u_0^{-1}(\pi \circ f(X^*)) = (\beta^1(X^*), \cdots, \beta^n(X^*)).$$

这证明引理的第一个论断成立. 令 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 分别是 G 和 H 的 Lie 代数. 令 $\mathfrak{m}$ 是由下列形式的矩阵组成的 $\mathfrak{g}$ 的线性子空间:

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ {}^tc & 0 \end{pmatrix}.$$

容易验证 $\mathfrak{m}$ 在 $\mathrm{ad}H$ 作用下是稳定的, 即对每个 $a \in H$, $\mathrm{ad}(a)(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$. 应用第二章定理 11.1, 则容易看出 (α^i_j) 在 $G(G/H, H)$ 中定义一个联络. 于是引理 2 的第二个论断可从下列三个事实得出: (1) 在同构 $f : G \to O(M)$ 下, (β^i) 对应于

(θ^i); (2) Riemann 联络形式 (ω^i_j) 由挠率为零这一性质来表征 (第四章定理 2.2), 即 $d\theta^i = -\sum_k \omega^i_k \wedge \theta^k$; (3) 联络形式 (α^i_j) 满足方程 $d\theta^i = -\sum_k \alpha^i_k \wedge \beta^k$.

现在来完成定理 3.1 的证明. 由引理 2 连同

$$d\alpha^i_j = -\sum_k \alpha^i_k \wedge \alpha^k_j - \beta^i \wedge \gamma_j$$

和

$$\beta^i + r\gamma_i = 0$$

一起就蕴涵着

$$d\alpha^i_j = -\sum_k \alpha^i_k \wedge \alpha^k_j + \frac{1}{r}\beta^i \wedge \beta^j.$$

这说明 Riemann 联络的曲率形式由 $\frac{1}{r}\theta^i \wedge \theta^j$ 给出. 由此可知, M 是截曲率为 $\frac{1}{r}$ 的常曲率空间.　　证毕.

评注　群 G 实际上是 M 的所有等距变换组成的群. 为了看清这一点, 令 $\mathfrak{I}(M)$ 是 M 的等距变换群并且用与定义 $f: G \to O(M)$ 同样的方法定义一个映射 $f: \mathfrak{I}(M) \to O(M)$. 那么 $G \subset \mathfrak{I}(M)$ 并且 $f: \mathfrak{I}(M) \to O(M)$ 是 $f: G \to O(M)$ 的扩张. 因为 f 把 $\mathfrak{I}(M)$ 一一地映射到 $O(M)$ 中, 又因为 $f(G) = O(M)$, 所以必然有 $G = \mathfrak{I}(M)$.

在定理 3.1 的证明过程中, 我们同时还得到下列定理.

定理 3.2　(1) 令 M 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中由下式定义的球面:

$$(x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = a^2.$$

令 g 是 $(dx^1)^2 + \cdots + (dx^{n+1})^2$ 在 M 上的限制, 那么 M 关于 Riemann 度量 g 是一个截面率为 $\frac{1}{a^2}$ 的常曲率空间.

(2) 令 M 是 $\mathbf{R}^n$ 中由下式定义的开集

$$(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 < a^2.$$

那么关于由

$$\frac{a^2[(a^2 - \sum_i (y^i)^2)(\sum_i (dy^i)^2) - (\sum_i y^i dy^i)^2]}{(a^2 - \sum_i (y^i)^2)^2}$$

给出的 Riemann 度量, M 是截曲率为 $-\frac{1}{a^2}$ 的常曲率空间.

定理 3.2 中所构造的各个空间 M 都是单连通的和齐性的, 从而由第四章定理 4.5, 它们也是完备的. 带有 Euclid 度量 $(dx^1)^2+\cdots+(dx^n)^2$ 的空间 $\mathbf{R}^n$ 给出一个零曲率的单连通完备空间.

对于一个常曲率 Riemann 流形, 根据它的截曲率是正的、负的或者零而分别称之为椭圆的、双曲的和平坦的 (或称局部 Euclid 的). 这些空间也被称为空间形式 (参看第六章定理 7.10).

5.4 平坦仿射联络和 Riemann 联络

贯穿本节. M 始终是一个 n 维连通仿紧流形.

令 $A(M)$ 是 M 上的仿射标架丛, 它是带结构群 $G=A(n;R)$ 的一个主纤维丛 (参看第三章 3.3 节). 如果 M 的每一点都有一个开邻域 U 和一个同构 $\Psi: A(U)\to U\times G$ 将每一点 $u\in A(U)$ 处的水平空间映射成 $U\times G$ 的标准平坦联络在 $\Psi(u)$ 点的水平空间, 则称 M 的仿射联络是平坦的. 带平坦仿射联络的流形称为局部仿射的. 如果 Riemann 联络为平坦仿射联络, 则 Riemann 流形是平坦的 (或称局部 Euclid 的).

定理 4.1 对于 M 的仿射联络, 下列条件互相等价:

(1) 它是平坦的;

(2) 相应线性联络的挠率和曲率恒为零;

(3) 仿射和乐群是离散的.

证明 由第二章定理 9.1, 一个仿射联络是平坦的当且仅当它在 $A(M)$ 上的曲率形式 $\tilde{\Omega}$ 恒为零. (1) 和 (2) 的等价性从第三章的命题 3.4 得出. (2) 和 (3) 的等价性从第二章的定理 4.2 和 8.1 得出. 证毕.

评注 类似地, 对 M 的线性联络而言, 下列条件相互等价:

(1) 它是平坦的, 亦即 $L(M)$ 上的联络是平坦的; (2) 它的曲率恒为零; (3) 线性 (或齐次) 和乐群是离散的.

凡是提到仿射和乐群和线性和乐群为离散时, 总是指它们是 0 维 Lie 群. 后面 (参看定理 4.2) 将会看到一个完备平坦仿射联络的仿射和乐群在仿射群 $A(n;\mathbf{R})$ 中是离散的. 但是线性和乐群在 $GL(n;\mathbf{R})$ 中却未必是离散的 (参看例 4.3). 我们将证明紧平坦 Riemann 流形的线性和乐群在 $O(n)$ 中是离散的 (参看定理 4.2(4) 的证明和定理 4.2 后面的评注).

例 4.1 令 $\xi_1,\cdots,\xi_k$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的线性无关元, $k\leqslant n$. 令 G 是由 $\xi_1,\cdots,\xi_k$ 生成的 $\mathbf{R}^n$ 的子群:

$$G=\{\sum m_i\xi_i;\ m_i\text{为整数}\}.$$

G 在 $\mathbf{R}^n$ 上的作用是真不连续的, 而且 $\mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{R}^n/G$ 的万有覆盖流形. $\mathbf{R}^n$ 的 Euclid 度量 $(dx^1)^2+\cdots+(dx^n)^2$ 是经 G 作用不变的, 从而在 $\mathbf{R}^n/G$ 上诱导一个平坦 Riemann 度量. 我们把带有这样定义的 Riemann 度量的流形 $\mathbf{R}^n/G$ 称为 Euclid 柱面; 若 $\xi_1,\cdots,\xi_k$ 构成 $\mathbf{R}^n$ 的一个基, 即 $k=n$, 则称之为 Euclid 环面. 每个带有不变 Riemann 度量的连通交换 Lie 群都是 Euclid 柱面. 此外如果它还是紧的, 那么它就是一个 Euclid 环面. 实际上, 这种 Lie 群的万有覆盖群同构于向量群 $\mathbf{R}^n$ 而且它的不变 Riemann 度量可以通过适当选取 $\mathbf{R}^n$ 的基而由 $(dx^1)^2+\cdots+(dx^n)^2$ 给出. 于是上面的论断是明显的. 下面的例子则说明环面可以允许有不是 Riemann 联络的平坦仿射联络. 该例取自 Kuiper[1].

例 4.2 带坐标系 (x,y) 的 $\mathbf{R}^2$ 的变换集 G:

$$(x,y)\to(x+ny+m,y+n),\quad n,m=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

构成仿射变换群的一个离散子群, 它真不连续地作用在 $\mathbf{R}^2$ 上, 并且商空间 $\mathbf{R}^2/G$ 微分同胚于环面. $\mathbf{R}^2$ 的平坦仿射联络在 $\mathbf{R}^2/G$ 上诱导一个平坦仿射联络. 但 $\mathbf{R}^2/G$ 的这个平坦仿射联络不是 Riemann 联络. 实际上, 假若它是 Riemann 联络, 那么万有覆盖空间 $\mathbf{R}^2$ 上的诱导 Riemann 度量必然具有 $adxdx+2bdxdy+cdydy$ 的形式, 其中 a、b、c 为常数, 因为这个度量必定是平行的. 另一方面, G 不是 $\mathbf{R}^2$ 关于这个度量的等距变换群. 这样就证明了上面的论断.

令 M 是局部仿射的并且选取一个线性标架 $u_0\in L(M)\subset A(M)$. 令 M^* 是平坦仿射联络经过 u_0 的和乐丛而 M' 是相应的平坦线性联络过 u_0 的和乐丛. 那么 M^* 和 M' 都是 M 上的主纤维丛并且它们的结构群分别是仿射和乐群 $\Phi(u_0)$ 和线性和乐群 $\Psi(u_0)$. 由于 $\Phi(u_0)$ 和 $\Psi(u_0)$ 是离散的, 所以 M^* 和 M' 都是 M 的覆盖流形. 第三章 3.3 节定义的同态 $\beta: A(M)\to L(M)$ 将 M^* 映射到 M' 上 (参看第三章命题 3.5). 因而 M^* 是 M' 的覆盖流形.

定理 4.2 令 M 是一个带有平坦仿射联络的流形. 令 $u_0\in L(M)\subset A(M)$. 令 M^* 是平坦仿射联络的过 u_0 的和乐丛而 M' 是相应平坦线性联络的过 u_0 的和乐丛. 那么

(1) M^* 是 M 的万有覆盖空间而且关于 M^* 上的诱导平坦仿射联络, 它同构于通常的仿射空间 A^n.

(2) 关于 M' 上的诱导平坦仿射联络, M' 是一个 Euclid 柱面, 而且 M' 的第一同伦群同构于 $\Phi(u_0)\to\Psi(u_0)$ 的同态核.

(3) 如果 M'' 是一个 Euclid 柱面并且是 M 的覆盖空间, 那么它也是 M' 的覆盖空间.

(4) M' 是一个 Euclid 环面当且仅当 M 是一个紧的平坦 Riemann 流形.

证明 令

$$d\theta^i = -\sum_j \omega_j^i \wedge \theta^j, \quad d\omega_j^i = -\sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k, \quad i,j=1,\cdots,n$$

是 M' 的平坦仿射联络在 $L(M')$ 上的结构方程. 令 N 是 $\Phi(u_0) \to \Psi(u_0)$ 的同态核. 因为 $M' = M^*/N$, 所以 M' 上的平坦仿射联络的仿射和乐群自然同构于 N(参看第二章命题 9.3). 群 N 仅由纯平移组成并且 M' 的线性和乐群是平凡的. 令 $\sigma : M' \to L(M')$ 是一个整体定义的平行的线性标架场. 令

$$\bar{\theta}^i = \sigma^*\theta^i, \quad \bar{\omega}_j^i = \sigma^*\omega_j^i, \quad i,j = 1,\cdots,n.$$

因为 σ 是水平的, 即 $\sigma(M')$ 是水平的, 所以有 $\bar{\omega}_j^i = 0$. 结构方程蕴涵着 $d\bar{\theta}^i = 0$. 可以断言, 对于 M' 的任意一点 O, 在 M' 上存在唯一的 Abel 群使点 O 是单位元且使形式 $\bar{\theta}^i$ 不变. 这个论断可从下列三个事实得出:

(a) $\bar{\theta}^1,\cdots,\bar{\theta}^n$ 在 M' 的每一点构成余切向量空间的基;

(b) $d\bar{\theta}^i = 0,\ i = 1,\cdots,n$;

(c) 令 X 是 M' 上的向量场且使得对 $i=1,\cdots,n$, $\bar{\theta}^i(X) = c^i$(c^i 为常数). 那么 X 按下述意义是完备的: 它生成 M' 的一个单参数整体变换群. 证毕.

联络的完备性蕴涵 (c) 如下. 令 X^* 是由 $\theta^i(X^*) = c^i(i=1,\cdots,n)$ 定义的 $L(M')$ 上的水平向量场. 在微分同胚 $\sigma : M' \to \sigma(M')$ 下, X 对应于 X^*. 由于 X^* 是完备的 (参看第三章命题 6.5), 所以 X 也是完备的. 注意到 (b) 蕴涵着断言存在的群是 Abel 群.

显然 $\bar{\theta}^1\bar{\theta}^1 + \cdots + \bar{\theta}^n\bar{\theta}^n$ 是可交换 Lie 群 M' 上的不变 Riemann 度量. 正如我们在例 4.1 中所看到的那样, M' 是一个 Euclid 柱面.

引理 1 令 $\mathbf{R}^n/G$ 是如同例 4.1 中所定义的一个 Euclid 柱面, 其中 $G = \left\{\sum_{i=1}^k m_i\xi_i;\ m_i\text{为整数}\right\}$. 那么 $\mathbf{R}^n/G$ 的仿射和乐群是一个同构于 G 的平移变换群.

引理 1 的证明 通过下列对应关系将每一点 $a \in \mathbf{R}^n$ 的切空间 $T_a(\mathbf{R}^n)$ 等同于 $\mathbf{R}^n$:

$$T_a(\mathbf{R}^n) \ni \sum_{i=1}^n \lambda^i(\partial/\partial x^i)_a \leftrightarrow (\lambda^1,\cdots,\lambda^n) \in \mathbf{R}^n.$$

从 $0 \in \mathbf{R}^n$ 到 $a \in \mathbf{R}^n$ 的线性平移把 $(\lambda^1,\cdots,\lambda^n) \in T_0(\mathbf{R}^n)$ 映射成具有相同分量的向量 $(\lambda^1,\cdots,\lambda^n) \in T_a(\mathbf{R}^n)$. 从 0 到 $a = (a^1,\cdots,a^n)$ 的仿射平移将 $(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)$(视为切仿射空间 $A_0(\mathbf{R}^n)$ 中的元素) 映射成 $(\lambda^1 + a^1,\cdots,\lambda^n + a^n) \in A_a(\mathbf{R}^n)$. 令 $\tau^* = x_t^*(0 \leqslant 1 \leqslant 1)$ 是从 0 到 $\sum_{i=1}^k m_i\xi_i \in G$ 的直线段, 并且令 $\tau = x_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是

τ^* 在投影 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n/G$ 下的象, 那么 τ 是 $\mathbf{R}^n/G$ 中的一条闭曲线. 令

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \xi_i = (a^1, \cdots, a^n) \in \mathbf{R}^n.$$

那么沿 τ 的仿射平移产生如下的平移:

$$(\lambda^1, \cdots, \lambda^n) \to (\lambda^1 + a^1, \cdots, \lambda^n + a^n).$$

这就完成了引理 1 的证明.

作为 M' 的覆盖空间, M^* 也是一个 Euclid 柱面. 由第二章的命题 9.3, M^* 的仿射和乐群是平凡的. 由引理 1, M^* 必然是通常的仿射空间 A^n, 从而证明了 (1) 成立.

由于 $M' = M^*/N$, 因而 M' 的第一同伦群同构于 N. 这就完成了 (2) 的证明.

令 M'' 是 M 的一个覆盖空间, 因为 M^* 是 M 的万有覆盖空间, 因而可以写成 $M'' = M^*/H$, 其中 H 是 $\Phi(u_0)$ 的一个子群. 由第二章命题 9.3, M'' 的仿射和乐群是 H. 如果 M'' 是一个 Euclid 柱面, 那么其仿射和乐群 H 仅由平移组成 (参看引理 1), 因而包含在 $\Phi(u_0) \to \Psi(u_0)$ 的同态核 N 中. 由于 $M' = M^*/N$, 因而可以推出 M'' 是 M' 的覆盖空间. 这样就证明了 (3).

设 M' 是一个 Euclid 环面, 则由此可知 M 是紧的并且 M 的线性和乐群 $\Phi(u_0)$ 是有限群. 这就蕴涵着 M 的平坦仿射联络是 Riemann 联络. 事实上, 在 $T_{x_0}(M)(x_0 = \pi(u_0))$ 中选取一个在以 x_0 为基点的线性和乐群作用下不变的内积, 然后通过平移将它扩张成一个 Riemann 度量. M 的平坦仿射联络关于这样构造的 Riemann 度量是一个 Riemann 联络.

反过来, 设 M 是一个紧连通的平坦 Riemann 流形. 根据 (1), 可将 M^* 等同于 $\mathbf{R}^n$, 从而可以写成 $M = \mathbf{R}^n/G$, 其中 G 是作用在 $\mathbf{R}^n$ 上的 Euclid 运动群的一个离散子群. 令 N 是 G 的由纯平移组成的子群. 鉴于 (2) 和 (3), 则问题成为证明 $\mathbf{R}^n/N$ 是一个 Euclid 环面. 首先需要证明几个引理.

引理 2 令 A 和 B 是 n 阶酉矩阵并且使得 A 与 $ABA^{-1}B^{-1}$ 交换. 若 B 的特征根具有正实部, 那么 A 与 B 交换.

引理 2 的证明 因为 $AABA^{-1}B^{-1} = ABA^{-1}B^{-1}A$, 故有 $ABA^{-1}B^{-1} = BA^{-1}B^{-1}A$. 不失一般性, 可以假设 B 是以 $b_k = \cos\, \beta_k + \sqrt{-1} \sin\, \beta_k, (k = 1, \cdots, n)$ 为对角线元的对角矩阵. 因为 $A^{-1} = {}^t\bar{A}$ 和 $B^{-1} = {}^t\bar{B} = \bar{B}$, 所以有

$$AB^t\bar{A}\bar{B} = ABA^{-1}B^{-1} = BA^{-1}B^{-1}A = B\ {}^t\bar{A}\bar{B}A.$$

比较第 (i,i) 个元素, 则有

$$\sum_{j=1}^{n} a^i_j b_j \bar{a}^i_j \bar{b}_i = \sum_{j=1}^{n} b_i \bar{a}^j_i \bar{b}_j a^j_i, \quad 其中 A = (a^i_j).$$

比较其虚部则得到

$$\sum_{j=1}^{n}(|a_j^i|^2+|a_i^j|^2)\cdot\sin(\beta_j-\beta_i)=0,\quad i=1,\cdots,n.$$

还可以假设 $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_{p_1}<\beta_{p_1+1}=\cdots=\beta_{p_1+p_2}<\cdots\leqslant\beta_n<\beta_1+\pi$. 因为所有 b_k 都具有正实部, 所以对 $i\leqslant p_1$ 和 $j>p_1$, 有

$$\sin(\beta_j-\beta_i)>0.$$

从而对于 $i\leqslant p_1$ 和 $j>p_1$, 必然有

$$a_j^i=a_i^j.$$

类似地, 对 $i\leqslant p_1+p_2$ 和 $j>p_1+p_2$ 有

$$a_j^i=a_i^j.$$

继续这个论证过程即可得到

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & 0\\ & A_2 & \\ 0 & & \ddots\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_1 & & 0\\ & B_2 & \\ 0 & & \ddots\end{pmatrix},$$

$$B_1=b_1I_1,\quad B_2=b_{p_1+1}I_2,\cdots,$$

其中 $A_1,A_2,\cdots$ 依次是 $p_1,p_2,\cdots$ 阶的酉矩阵, 而 $I_1,I_2,\cdots$ 则分别是 p_1 阶, p_2 阶, $\cdots$ 的单位矩阵. 这清楚地说明 A 和 B 交换.

对于任何 (r,s) 型矩阵 $A=(a_j^i)$, 置

$$\varphi(A)=(\sum_{i,j}|a_j^i|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

换句话说, 当把 A 看作具有 rs 个分量的向量时, $\varphi(A)$ 就是 A 的长度. 于是有

$$\begin{aligned}\varphi(A+B)&\leqslant\varphi(A)+\varphi(B),\\ \varphi(AB)&\leqslant\varphi(A)\cdot\varphi(B).\end{aligned}$$

其中第二个不等式可从 Schwarz 不等式得出. 若 A 是正交矩阵, 则有

$$\varphi(AB)=\varphi(B),\quad \varphi(CA)=\varphi(C).$$

$\mathbf{R}^n$ 的每一个 Euclid 运动由

$$x \to Ax + p, \quad x \in \mathbf{R}^n$$

给出, 其中 A 是正交矩阵 (称为运动的旋转部分), p 是 $\mathbf{R}^n$ 的元素 (称为运动的平移部分), 并且将这个运动记为 (A, p).

引理 3　给定任何两个 Euclid 运动 (A, p) 和 (B, q), 置

$$(A_1, p_1) = (A, p)(B, q)(A, p)^{-1}(B, q)^{-1}.$$

令 I 是 n 阶单位矩阵, 若 $\varphi(A - I) < a$ 且 $\varphi(B - I) < b$, 则有

(1) $\varphi(A_1 - I) < 2ab$;

(2) $\varphi(p_1) < b \cdot \varphi(p) + a \cdot \varphi(q)$.

引理 3 的证明　由矩阵运算得

$$\begin{aligned} A_1 - I =& ABA^{-1}B^{-1} - I = (AB - BA)A^{-1}B^{-1} \\ =& ((A - I)(B - I) - (B - I)(A - I))A^{-1}B^{-1}. \end{aligned}$$

因为 $A^{-1}B^{-1}$ 是正交矩阵, 所以有

$$\varphi(A_1 - I) \leqslant \varphi(A - I) \cdot \varphi(B - I) + \varphi(B - I) \cdot \varphi(A - I) \leqslant 2ab.$$

通过简单计算得

$$p_1 = A(I - B)A^{-1}p + AB(I - A^{-1})B^{-1}q.$$

经过与上面同样的推理可得

$$\varphi(p_1) \leqslant \varphi(I - B) \cdot \varphi(p) + \varphi(I - {}^tA) \cdot \varphi(q) < b\varphi(p) + a\varphi(q).$$

引理 4　使用跟引理 3 同样的记号, 置

$$(A_k, p_k) = (A, p)(A_{k-1}, p_{k-1})(A, p)^{-1}(A_{k-1}, p_{k-1})^{-1}, \quad k = 2, 3, \cdots.$$

那么对于 $k = 1, 2, 3, \cdots$, 有

(1) $\varphi(A_k - I) < 2^k a^k b$;

(2) $\varphi(p_k) < (2^k - 1)a^{k-1}b \cdot \varphi(p) + a^k \cdot \varphi(q)$.

引理 4 的证明　用引理 3 通过简单的归纳即可建立上面的两个不等式.

引理 5　令 G 是 $\mathbf{R}^n$ 的 Euclid 运动群的一个离散子群. 令 $a < \dfrac{1}{2}$ 并且

$$G(a) = \{(A, p) \in G;\ \varphi(A - I) < a\}.$$

那么 $G(a)$ 的任何两个元素 (A,p) 和 (B,q) 均可交换.

引理 5 的证明 由引理 4, 当 k 趋向无穷时, $\varphi(A_k-I)$ 和 $\varphi(p_k)$ 趋于零. 因为 G 在 $A(n;\mathbf{R})$ 中是离散的, 所以存在一个整数 k 使得 $A_k=I$ 且 $p_k=0$. 现在来证明满足 $\varphi(A-I)<\dfrac{1}{2}$ 的正交矩阵 A 的特征根 $a_1,\cdots,a_n$ 具有正实部. 若 U 是一个酉矩阵并且使得 UAU^{-1} 为对角矩阵, 那么

$$\begin{aligned}\varphi(A-I)=&\varphi(U(A-I)U^{-1})=\varphi(UAU^{-1}-I)\\=&(|a_1-1|^2+\cdots+|a_n-1|^2)^{1/2}<\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

这证明我们的论断成立. 将引理 2 应用于 $A_k=AA_{k-1}A^{-1}A_{k-1}$ 即知 $A_{k-1}=I$. 继续这个论证过程可得出 $A_1=I$. 因而 A 和 B 交换. 从而

$$\begin{aligned}&p_1=(I-B)p-(I-A)q,\quad p_2=(A-I)p_1,\\&p_3=(A-I)p_2=(A-I)^2p_1,\\&\cdots\cdots\\&p_k=(A-I)p_{k-1}=(A-I)^{k-1}p_1.\end{aligned}$$

因为 $p_k=0$, 故有

$$(A-I)^{k-1}p_1=0.$$

将 (A,p) 和 (B,q) 对调并且注意到

$$(B,q)(A,p)(B,q)^{-1}(A,p)^{-1}=(I,-p_1),$$

则得到对于某个整数 m,

$$(B-I)^{m-1}p_1=0.$$

因为 A 和 B 交换, 因而存在一个酉矩阵 U 使得 UAU^{-1} 和 UBU^{-1} 都是对角矩阵. 置

$$UAU^{-1}=\begin{pmatrix}a_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_n\end{pmatrix},\quad UBU^{-1}=\begin{pmatrix}b_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & b_n\end{pmatrix},$$

$$Up=\begin{pmatrix}r_1\\ \vdots\\ r_n\end{pmatrix},\quad Uq=\begin{pmatrix}s_1\\ \vdots\\ s_n\end{pmatrix}.$$

那么从 $(A-I)^{k-1}p_1=(A-I)^{k-1}((I-B)p-(I-A)q)=0$ 得到

$$(a_i-1)^{k-1}\{(1-b_i)r_i-(1-a_i)s_i\}=0,\quad i=1,\cdots,n;$$

类似地, 从

$$(B-I)^{m-1}p_1=(B-I)^{m-1}\{(I-B)p-(I-A)q\}=0$$

得到

$$(b_i-1)^{m-1}\{(1-b_i)r_i-(1-a_i)s_i\}=0,\quad i=1,\cdots,n,$$

从而有

$$(1-b_i)r_i-(1-a_i)s_i=0,\quad i=1,\cdots,n.$$

换言之, 有

$$p_1=(I-B)p-(I-A)q=0.$$

这就完成了引理 5 的证明.

若 $(A,p)\in G(a)$ 且 $(B,q)\in G$, 那么 $(B,q)(A,p)(B,q)^{-1}\in G(a)$, 实际上,

$$\varphi(BAB^{-1}-I)=\varphi(B(A-I)B^{-1})=\varphi(A-I)<a.$$

这说明由 $G(a)$ 生成的群是 G 的不变子群. 由引理 5, 若 $a<\dfrac{1}{2}$, 那么它还是 Abel 群.

对于 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集 V, 如果存在一个元素 $x_0\in\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^n$ 的一个向量子空间 S 使得 $V=\{x+x_0;x\in S\}$, 则将该子集 V 称为一个 Euclid 子空间. 如果 G 是 $\mathbf{R}^n$ 的 Euclid 运动群并且 $\mathbf{R}^n$ 是唯一经 G 作用不变的 Euclid 子空间, 则称群 G 是不可约的.

引理 6 如果 H 是 $\mathbf{R}^n$ 的不可约 Euclid 运动群 G 的 Abel 正规子群. 那么 H 只包含纯平移.

引理 6 的证明 因为 H 是交换的, 所以通过在必要时对 $\mathbf{R}^n$ 的基使用正交变换, 就可以假定 H 的元素 (A,p) 能够同时化成下列形式:

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & A_k & \\ 0 & & & I_{n-2k}\end{pmatrix},\quad p=\begin{pmatrix}p_1\\ \vdots\\ p_k\\ p^*\end{pmatrix},\quad A_i=\begin{pmatrix}\cos\ \alpha_i & \sin\ \alpha_i\\ -\sin\ \alpha_i & \cos\ \alpha_i\end{pmatrix},\ (i=1,\cdots,k),$$

其中, I_{n-2k} 是 $n-2k$ 阶单位矩阵, 每个 p_i 是具有两个分量的向量而 p^* 是具有 $n-2k$ 个分量的向量. 此外, 对于每个 i, 存在 H 的一个元素 (A,p) 使得 A_i 不等于单位矩阵 I_2, 因而 A_i-I_2 是非奇异的.

现在我们的任务是要证明 $k=0$, 即对所有 $(A,p)\in H$, $A=I_n$. 假若 $k\geqslant 1$, 那么将会导致矛盾.

对于每个 i, 选取 $(A,p)\in H$ 使得 A_i-I_2 是非奇异的并且由

$$(A_i-I_2)t_i=p_i$$

定义一个具有 2 个分量的向量 t_i. 我们将证明对于所有 $(B,q)\in H$,

$$(B_i-I_2)t_i=q_i.$$

因为 (A,p) 和 (B,q) 交换, 所以有

$$\begin{aligned}A_iq_i+p_i=&B_ip_i+q_i, \text{或者}\\(A_i-I_2)q_i=&(B_i-I_2)p_i.\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}(B_i-I_2)t_i=&(B_i-I_2)(A_i-I_2)^{-1}p_i=(A_i-I_2)^{-1}(B_i-I_2)p_i\\=&(A_i-I_2)^{-1}(A_i-I_2)q_i=q_i.\end{aligned}$$

这样就证明了我们的论断. 用下式定义一个向量 $t\in\mathbf{R}^n$

$$t=\begin{pmatrix}t_1\\\vdots\\t_k\\0\end{pmatrix}.$$

于是就有

$$\begin{aligned}(I_n,t)(A,p)(I_n,t)^{-1}=&(I_n,t)(A,p)(I_n,-t)\\=&(A,p-(A-I_n)t),\quad (A,p)\in H,\end{aligned}$$

其中,

$$p-(A-I_n)t=\begin{pmatrix}p_1\\\vdots\\p_k\\p^*\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}p_1\\\vdots\\p_k\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\p^*\end{pmatrix}.$$

通过将 $\mathbf{R}^n$ 的原点平移到 t, 那么可以假设 H 的元素 (A,p) 具有下列形式

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & A_k & \\ 0 & & & I_{n-2k}\end{pmatrix}\quad p=\begin{pmatrix}0\\0\\p^*\end{pmatrix}.$$

令 V 是由前 $2k$ 个分量为零的所有向量组成的 R^n 的向量子空间, 那么 V 是在 H 的所有元素作用下不变的. 我们将证明 V 在 G 的作用下也是不变的. 首先注意到 V 恰好是在所有 A 作用下保持不动的全体向量构成的集合, 其中 $(A,p) \in H$. 令 $(C,r) \in G$. 因为 H 是 G 的正规子群, 所以对每个 $(A,p) \in H$, 存在一个元素 $(B,q) \in H$ 使得

$$(A,p)(C,r) = (C,r)(B,q).$$

若 $v \in V$, 则 $ACv = CBv = Cv$. 因为 Cv 是在所有 A 作用下固定不动的, 所以它在 V 中. 因而 C 具有下列形式

$$C = \begin{pmatrix} C' & 0 \\ 0 & C'' \end{pmatrix},$$

其中 C' 和 C'' 分别是 $2k$ 阶和 $n-2k$ 阶的. 为了证明 r 的前 $2k$ 个分量为零, 我们写成

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_k \\ r^* \end{pmatrix}.$$

对每个 i, 令 (A,p) 为 H 的一个元素并且使得 $A_i - I_2$ 是非奇异的. 将恒等式 $(A,p)(C,r) = (C,r)(B,q)$ 应用于 $\mathbf{R}^n$ 的零向量并且比较两边的第 $(2i-1)$ 个和第 $2i$ 个分量, 则有

$$A_i r_i = r_i.$$

因为 $(A_i - I_2)$ 是非奇异的, 所以 $r_i = 0$. 因而 G 的每一个元素 (C,r) 都具有下列形式

$$C = \begin{pmatrix} C' & 0 \\ 0 & C'' \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r^* \end{pmatrix}.$$

这说明 V 是经 G 作用不变的, 从而与 G 的不可约性相矛盾. 这就完成了引理 6 的证明.

引理 7　令 G 是 $\mathbf{R}^n$ 的 Euclid 运动群, 若 $\mathbf{R}^n/G$ 是紧的, 则 G 是不可约的.

引理 7 的证明　假设 G 不是不可约的, 令 V 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个经 G 作用不变的真 Euclid 子空间. 令 x_0 是 V 的任意点并且令 L 是过 x_0 且垂直于 V 的直线. 令 $x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$ 是 L 上的一个点列并且使得 x_0 与 x_m 之间的距离等于 m. 用

$G(x_0)$ 表示 G 的过 x_0 的轨道. 因为 $G(x_0)$ 在 V 中, 所以 $G(x_0)$ 与 x_m 之间的距离至少是 m, 从而就等于 m. 因此在投影 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n/G$ 之下, x_0 和 x_m 在 $\mathbf{R}^n/G$ 中的象之间的距离等于 m. 这意味着 $\mathbf{R}^n/G$ 不是紧的.

现在我们已经有条件来完成 (4) 的证明. 令 G 和 $G(a)$ 如引理 5 所述并且设 $a < \frac{1}{2}$. 令 H 是由 $G(a)$ 生成的群, 它是 G 的可交换正规子群. 设 $\mathbf{R}^n/G$ 是紧的. 引理 6 和引理 7 蕴涵着 H 除单纯平移之外不包含任何其他变换. 另一方面, 因为 G 是离散的, 故由 $G(a)$ 的构造可知 G/H 是有限的. 从而 $\mathbf{R}^n/H$ 也是紧的并且因此是一个 Euclid 环面. 令 N 是由 G 的所有纯平移组成的一个子群. 因为 $G(a)$ 包含 N, 所以有 $N = H$. 这就证明 $\mathbf{R}^n/N$ 是一个 Euclid 环面. 证毕.

评注 (4) 意味着紧平坦 Riemann 流形 $M = \mathbf{R}^n/G$ 的线性和乐群同构于 G/N, 从而是有限的.

虽然在 Auslander-Markus[1] 中, (1), (2), (3) 实际都有, 但是我们把重点放在仿射和乐群上. (4) 原来是由 Bieberbach[1] 证明的. 这里所给出的证明取自 Frobenius[1] 和 Zassehaus[1].

例 4.3 非紧的平坦 Riemann 流形的线性和乐群不可能是有限的. 实际上, 固定任意一个无理实数 λ. 对每个整数 m, 置

$$A(m) = \begin{pmatrix} \cos\ \lambda m\pi & \sin\ \lambda m\pi & 0 \\ -\sin\ \lambda m\pi & \cos\ \lambda m\pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p(m) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}.$$

然后再置 $G = \{(A(m), p(m));\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$. 容易看出 G 是 $\mathbf{R}^3$ 的 Euclid 运动群的离散子群并且自由地作用在 $\mathbf{R}^3$ 上. $\mathbf{R}^3/G$ 的线性和乐群同构于群 $\{A(m);\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$.

推论 4.3 带平坦仿射联络的流形 M 允许以 Euclid 环面作为其覆盖空间当且仅当 M 是紧平坦 Riemann 流形.

证明 令 M'' 是一个 Euclid 环面并且是 M 的覆盖空间. 由定理 4.2 的 (3), M'' 是 M' 的覆盖空间. 因而 M' 为一紧 Euclid 柱面, 从而是一个 Euclid 环面. 由定理 4.2(3), M 是一个紧平坦 Riemann 流形. 逆蕴涵关系包含在定理 4.2 的 (4) 中. 证毕.

例 4.4 在例 4.2 中置 $M = \mathbf{R}^2/G$. 令 N 是由下列平移组成的 G 的子群:

$$(x, y) \to (x + m, y), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

那么在这种情况下, 定理 4.2 中定义的覆盖空间 M' 由 $\mathbf{R}^2/N$ 给出. 显然 M' 是通常的柱面, 即圆周和直线的直积.

二维完备平坦 Riemann 流形的确定归功于 Killing[1,2], Klein[1,2] 和 H. Hopf[1]. 在这里我们将给出他们的结果及证明的提示.

除 Euclid 平面之外, 还有四种类型的二维完备平坦 Riemann 流形. 我们对每一种类型给出它的基本群 (第一同伦群) 并用笛卡尔坐标系 (x, y) 描述它们在万有覆盖空间 $\mathbf{R}^2$ 上的作用.

(1) 通常 (可定向的) 柱面:

$$(x, y) \to (x+n, y), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

(2) 通常 (可定向的) 环面:

$$(x, y) \to (x+ma+n, y+mb) \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

$$a, b \text{为实数且} b \neq 0.$$

(3) 无限宽的 Möbius 带或 (不可定向的) 扭曲柱面:

$$(x, y) \to (x+n, (-1)^n y), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

(4) Klein 瓶或 (不可定向的) 扭曲环面:

$$(x, y) \to (x+n, (-1)^n y + bm), \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

$$b \text{为非零实数}.$$

任何二维完备平坦 Riemann 流形 M 在不计常数因子的条件下同构于上面四种类型的曲面之一.

粗略证明如下. 由定理 4.2, 问题归结为确定自由作用在 $\mathbf{R}^2$ 上的离散运动群. 令 G 是这样一个离散群. 首先证明 G 的每一个能够保持 $\mathbf{R}^2$ 的定向的元素必定是平移. 置 $z = x + iy$, 那么 $\mathbf{R}^2$ 的每个保持定向的运动均有下列形式

$$z \to \varepsilon z + w,$$

其中 ε 是绝对值为 1 的复数并且 w 是复数. 若将变换 $z \to \varepsilon z + w$ 重复 r 次, 则得到变换

$$z \to \varepsilon^r z + (\varepsilon^{r-1} + \varepsilon^{r-2} + \cdots + 1)w.$$

容易看出, 如果 $\varepsilon \neq 1$, 那么点 $w/(1-\varepsilon)$ 是在变换 $z \to \varepsilon z + w$ 作用下的不动点. 这与 G 是自由作用在 $\mathbf{R}^2$ 上的假设矛盾. 因而 $\varepsilon = 1$. 这证明我们的论断成立. 若 f

是 G 的一个能够保持 $\mathbf{R}^2$ 定向的元素, 则 f^2 是一个保持定向的变换, 因而是一个平移. 从而证明了 G 的每个元素都是下列类型的变换

$$z \to z + w\text{或者}z \to \bar{z} + w,$$

其中 $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数. 于是容易断定 M 必定是上面四种类型的曲面之一. 证明的细节留给读者.

第六章　变　　换

6.1　仿射映射和仿射变换

令 M 和 M' 分别是装备了线性联络 Γ 和 Γ' 的流形. 贯穿本节将始终以 $P(M,G)$ 和 $P'(M',G')$ 分别表示 M 和 M' 的线性标架丛 $L(M)$ 和 $L(M')$, 因而 $G=GL(n;\mathbf{R})$, $G'=GL(n';\mathbf{R})$, 其中, $n=\dim\ M$, $n'=\dim\ M'$.

C^1 可微的映射 $f:M\to M'$ 诱导连续映射 $f:T(M)\to T(M')$, 其中 $T(M)$ 和 $T(M')$ 分别为 M 和 M' 的切丛. 若诱导映射 $f:T(M)\to T(M')$ 将每条水平曲线映射成水平曲线, 即 f 把沿 M 的每条曲线 τ 的平行向量场映射成沿曲线 $f(\tau)$ 的平行向量场, 则将 $f:M\to M'$ 称为仿射映射.

命题 1.1　仿射映射 $f:M\to M'$ 把 M 的每条测地线 (连同其仿射参数) 映射成 M' 的测地线. 因而 f 与指数映射交换, 即

$$f\circ\exp\ X=\exp\circ f(X),\quad X\in T_x(M).$$

证明　由仿射映射的定义, 这是明显的.　证毕.

命题 1.1 蕴涵着: 假若联络 Γ 和 Γ' 是 C^∞ 的, 那么仿射映射必然是 C^∞ 的.

若对所有 $x\in M$, $f(X_x)=X'_{f(x)}$, 则称 M 的向量场 X 与 M' 的向量场 X' 是 f 相关的 (参看第一章 1.1 节).

命题 1.2　令 $f:M\to M'$ 是一个仿射映射. 令 X,Y,Z 都是 M 上的向量场并且分别 f 相关于 M' 上的向量场 X',Y',Z', 那么

(1) ∇_XY 与 $\nabla_{X'}Y'$ 是 f 相关的, 其中 ∇ 在 M 和 M' 中都表示协变微分;

(2) $T(X,Y)$ 和 $T'(X',Y')$ 是 f 相关的, 其中 T 和 T' 分别是 M 和 M' 的挠率张量场;

(3) $R(X,Y)Z$ 与 $R'(X',Y')Z'$ 是 f 相关的, 其中 R 和 R' 分别是 M 和 M' 的曲率张量场.

证明　(1) 令 x_t 是 X 的一条积分曲线使得 $x=x_0$, 并且令 τ_0^t 是沿这条曲线从 x_t 到 $x=x_0$ 的平行移动, 那么 (参看第三章 3.1 节)

$$(\nabla_XY)_x=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}(\tau_0^tY_{x_t}-Y_x).$$

置 $x'_t=f(x_t)$, 并且令 ${\tau'}_0^t$ 是沿这条象曲线从 x'_t 到 $x'=x'_0$ 的平移. 因为 f 与平移

可交换, 所以

$$
\begin{aligned}
f((\nabla_X Y)_x) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(\tau_0^t Y_{x_t}) - f(Y_x)] \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\tau'^t_0 Y'_{x'_t} - Y'_{x'}) = (\nabla_{X'}Y')_{x'}.
\end{aligned}
$$

(2) 和 (3) 从 (1) 和第三章的定理 5.1 得出. 证毕.

若 M 到其自身的微分同胚 f 是仿射映射, 则将 f 称为 M 的仿射变换. M 的任何变换都能自然诱导从 $P(M,G)$ 的一个自同构 $\tilde{f}$; 并且 $\tilde{f}$ 把 $x\in M$ 点的标架 $u=(X_1,\cdots,X_n)$ 映射为 $f(x)\in M$ 点的标架 $\tilde{f}(u)=(fX_1,\cdots,fX_n)$. 因为 $\tilde{f}$ 是从 P 的自同构, 所以它使 P 的每个基本向量保持不变.

命题 1.3 (1) 对于 M 的每个变换 f, 线性标架从 P 的诱导自同构 $\tilde{f}$ 使标准形式 θ 保持不变; 反过来, P 的每个使 θ 保持不变的保纤维变换都是由 M 的变换诱导的.

(2) 如果 f 是 M 的仿射变换, 那么 P 的诱导自同构 $\tilde{f}$ 使标准形式 θ 和联络形式 ω 均保持不变; 反过来, P 的每个使 θ 和 ω 均保持不变的保纤维变换都是由 M 的仿射变换诱导的.

证明 (1) 令 $X^*\in T_u(P)$ 并且置 $X=\pi(X^*)$, 因而 $X\in T_x(M)$, 其中 $x=\pi(u)$. 那么 (参看第三章 3.2 节)

$$
\theta(X^*) = u^{-1}(X), \quad \theta(\tilde{f}X^*) = \tilde{f}(u)^{-1}(fX),
$$

其中标架 u 和 $\tilde{f}(u)$ 分别被看作从 $\mathbf{R}^n$ 到 $T_x(M)$ 和 $T_{f(x)}(M)$ 的线性映射. 从 $\tilde{f}$ 的定义可知下列图表是可交换的:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{R}^n & \\
u \swarrow & & \searrow \tilde{f}(u) \\
T_x(M) & \xrightarrow{f} & T_{f(x)}(M).
\end{array}
$$

从而 $u^{-1}(X)=\tilde{f}(u)^{-1}(fX)$. 这样就证明了 θ 是经 $\tilde{f}$ 作用不变的.

反过来, 令 F 是 P 的一个使 θ 保持不变的保纤维变换. 令 f 是由 F 诱导的底流形 M 上的变换. 我们要证明 $\tilde{f}=F$. 置 $J=\tilde{f}^{-1}\circ F$, 那么 J 是 P 的一个使 θ 不变的保纤维变换. 而且 J 还诱导底流形 M 上的恒等变换. 因此有

$$
u^{-1}(X) = \theta(X^*) = \theta(JX^*) = J(u)^{-1}(X), \quad X^*\in T_u(P).
$$

这蕴涵着 $J(u)=u$, 即 $\tilde{f}(u)=F(u)$.

(2) 令 f 是 M 的一个仿射变换. P 的自同构 $\tilde{f}$ 把联络 Γ 映射成一个联络, 记为 $\tilde{f}(\Gamma)$, 而且形式 $(\tilde{f}^{-1})^*\omega$ 是 $\tilde{f}(\Gamma)$ 的联络形式 (参看第二章命题 6.1). 从仿射变

换的定义可以看出对每一个 $u \in P$, $\tilde{f}$ 将 $T_u(P)$ 的水平子空间映射到 $T_{\tilde{f}(u)}(P)$ 的水平子空间. 这意味着 $\tilde{f}(\Gamma) = \Gamma$, 从而 $\tilde{f}^*\omega = \omega$.

反过来, 令 F 是 P 的一个使 θ 和 ω 不变的保纤维变换. 由 (1), 存在 M 的一个变换 f 使得 $F = \tilde{f}$. 因为 $\tilde{f}$ 把 P 的每一条水平曲线映射 P 的水平曲线, 所以变换 $f: T(M) \to T(M)$ 将 $T(M)$ 的每条水平曲线映射成 $T(M)$ 的水平曲线. 这意味着 $f: M \to M$ 是一个仿射映射, 从而完成了证明.　证毕.

评注　假设 M 是可定向的, 那么从 P 由两个主纤维丛组成, 记为 $P^+(M, G^0)$ 和 $P^-(M, G^0)$, 其中 G^0 是 $G = GL(n; \boldsymbol{R})$ 的单位连通分支. 而且使 θ 不变的 P^+ 或 P^{-1} 的任何变换 F 是保纤维的, 因而是由底流形 M 的变换 f 诱导的. 事实上, P^+ 或 P^- 的每个垂直向量 X^* 被 F 映射成垂直向量, 因为 $\theta(FX^*) = \theta(X^*) = 0$. 因此 P^+ 或 P^- 的任何纤维中的任何曲线仍被 F 映射成某纤维中的曲线. 因为 P^+ 或 P^- 的纤维是连通的, 所以 F 是保纤维的.

命题 1.4　令 Γ 为 M 上的线性联络. 对于 M 上的变换 f, 下列条件是相互等价的:

(1) f 是 M 的仿射变换;

(2) $\tilde{f}^*\omega = \omega$, 其中 ω 是 Γ 的联络形式而 $\tilde{f}$ 是由 f 诱导的 P 上的变换;

(3) $\tilde{f}$ 使每个标准水平向量场 $B(\xi)$ 保持不变;

(4) 对 M 上的任何向量场 Y 和 Z, $f(\nabla_Y Z) = \nabla_{fY}(fZ)$.

证明　(i) (1) 与 (2) 的等价性包含在命题 1.3 中.

(ii) (2) $\to$ (3). 由命题 1.3 有

$$\xi = \theta(B(\xi)) = (\tilde{f}^*\theta)(B(\xi)) = \theta(\tilde{f}^{-1}B(\xi)).$$

因为 $\omega(B(\xi)) = 0$, 所以 (2) 蕴涵着

$$0 = \omega(B(\xi)) = (\tilde{f}^*\omega)(B(\xi)) = \omega(\tilde{f}^{-1} \cdot B(\xi)).$$

这意味着 $\tilde{f}^{-1} \cdot B(\xi) = B(\xi)$.

(iii) (3) $\to$ (2). u 点的水平子空间由 $B(\xi)_u$ 的集合给出. 从而 (3) 蕴涵着 $\tilde{f}$ 把每个水平子空间映射为水平子空间. 这意味着 $\tilde{f}(\Gamma) = \Gamma$. 从而 $\tilde{f}^*\omega = \omega$.

(iv) (1) $\to$ (4). 这是命题 1.2 的结果.

(v) (4) $\to$ (1). 令 Z 是沿曲线 $\tau = x_t$ 的平行向量场. 令 Y 是沿着 τ 而切于 τ 的向量场, 即 $Y_{x_t} = \dot{x}_t$. 将 Y 和 Z 扩张成 M 上的向量场并且仍然用相同的字母 Y 和 Z 分别表示它们. (4) 蕴涵着 $f(Z)$ 沿 $f(\tau)$ 是平行的. 这就意味着 f 是一个仿射变换.　证毕.

M 上的仿射变换集构成一个群, 记为 $\mathfrak{A}(M)$ 或 $\mathfrak{A}(\Gamma)$. P 上使 θ 和 ω 不变的所有保纤维变换的集合也构成一个群, 记为 $\mathfrak{A}(P)$, 并且它标准同构于 $\mathfrak{A}(M)$. 我们将通过证实 $\mathfrak{A}(P)$ 关于 P 的紧开拓扑是一个 Lie 群来证明 $\mathfrak{A}(M)$ 是一个 Lie 群.

定理 1.5 令 Γ 是具有有限个连通分支的流形 M 上的线性联络. 那么 M 的仿射变换群 $\mathfrak{A}(M)$ 关于 P 的紧开拓扑是一个 Lie 变换群.

证明 令 $\theta=(\theta^i)$ 和 $\omega=(\omega^j_k)$ 分别是 P 上的标准形式和联络形式. 置

$$g(X^*,Y^*)=\sum_i\theta^i(X^*)\theta^i(Y^*)+\sum_{j,k}\omega^j_k(X^*)\omega^j_k(Y^*),\quad X^*,Y^*\in T_u(P).$$

因为 n^2+n 个 1 形式 $\theta^i,\omega^j_k(i,j,k=1,\cdots,n)$ 在 P 的每一点 u 都构成余切空间的基 (参看第三章命题 2.6), 故由命题 1.3, g 是 P 上经 $\mathfrak{A}(P)$ 作用不变的 Riemann 度量. 由第一章的定理 4.6 和推论 4.9, P 的等距变换群关于紧开拓扑是 P 的 Lie 变换群 (也可参看第四章定理 3.10). 因为 $\mathfrak{A}(P)$ 显然是 P 的等距变换群的一个闭子群, 所以 $\mathfrak{A}(P)$ 也是 P 的一个 Lie 变换群. 证毕.

6.2 无穷小仿射变换

本节始终都以 $P(M,G)$ 表示流形 M 上的线性标架丛, 因而 $G=GL(n;\mathbf{R})$, 其中 $n=\dim\ M$.

M 的每个变换 φ 自然诱导 P 的一个变换. 相应地, M 上的每个向量场 X 也自然地诱导 P 上的一个向量场 $\tilde{X}$. 更确切地说, 我们将证明下列命题.

命题 2.1 对于 M 上的每个向量场 X, 都存在 P 上的唯一向量场 $\tilde{X}$ 使得

(1) 对于每个 $a\in G$, $\tilde{X}$ 都是在 R_a 的作用下不变的;

(2) $L_{\tilde{X}}\theta=0$;

(3) $\tilde{X}$ 与 X 是 π 相关的, 即对于每个 $u\in P$, $\pi(\tilde{X}_u)=X_{\pi(u)}$. 反过来, 在 P 上给定一个满足 (1) 和 (2) 的向量场 $\tilde{X}$, 则在 M 上存在满足 (3) 的唯一向量场 X.

我们将 $\tilde{X}$ 称为 X 的自然提升.

证明 给定 M 上的一个向量场 X 和一个点 $x\in M$, 令 φ_t 是由 X 在 x 的邻域 U 中生成的局部单参数变换群. 对于每个 t, φ_t 都自然地诱导一个从 $\pi^{-1}(U)$ 到 $\pi^{-1}(\varphi_t(U))$ 的变换 $\tilde{\varphi}_t$, 因而得到一个局部单参数变换群 $\tilde{\varphi}_t:\pi^{-1}(U)\to P$, 并由此得到 P 上的诱导向量场, 记为 $\tilde{X}$. 因为对每个 $a\in G$, $\tilde{\varphi}_t$ 与 R_a 可交换. 所以 $\tilde{X}$ 满足 (1)(参看第一章推论 1.8). 因为 $\tilde{\varphi}_t$ 保持形式 θ 不变, 所以 $\tilde{X}$ 满足 (2). 最后, $\pi\circ\tilde{\varphi}_t=\tilde{\varphi}_t\circ\pi$ 蕴涵 (3).

为证明 $\tilde{X}$ 的唯一性, 令 $\tilde{X}_1$ 是 P 上满足 (1)、(2)、(3) 的另一个向量场. 令 $\widetilde{\psi}_t$ 是由 $\tilde{X}_1$ 生成的局部单参数变换群, 那么 $\widetilde{\psi}_t$ 与每一个 $R_a(a\in G)$ 交换并保持标准

形式 θ 不变. 由命题 1.3 的 (1) 可知, $\tilde{\psi}_t$ 是由 M 的局部单参数变换群 ψ_t 诱导的. 因为 (3), ψ_t 诱导 M 上的向量场 X. 因而有 $\psi_t = \varphi_t$, 从而 $\tilde{\psi}_t = \tilde{\varphi}_t$, 而这又蕴涵着 $\tilde{X} = \tilde{X}_1$.

反过来, 令 $\tilde{X}$ 是 P 上满足 (1) 和 (2) 的向量场. 对每个 $x \in M$ 选取一点 $u \in P$ 使得 $\pi(u) = x$. 然后置 $X_x = \pi(\tilde{X}_u)$. 因为 $\tilde{X}$ 满足 (1), 所以 X_x 不依赖于 u 的选取, 因而得到一个满足 (3) 的向量场 X. X 的唯一性是显然的. 证毕.

令 $\varGamma$ 为 M 上的线性联络. 对于 M 上的向量场 X 来说, 如果对每个 $x \in M$, 从 x 的一个邻域 U 到 M 中的局部变换 φ_t 组成的局部单参数群保持联络 $\varGamma$ 不变, 更确切地说, 若每个 $\varphi_t : U \to M$ 是仿射映射, 其中 U 装备了仿射联络 $\varGamma|_U$(它是 $\varGamma$ 在 U 上的限制), 那么就将该向量场 X 称为 M 的无穷小仿射变换.

命题 2.2　令 $\varGamma$ 是 M 上的一个线性联络. 对于 M 上的向量场 X, 下列条件互相等价:

(1) X 是 M 的无穷小仿射变换;

(2) $L_{\tilde{X}}\omega = 0$, 其中, ω 是 $\varGamma$ 的联络形式, $\tilde{X}$ 是 X 的自然提升;

(3) 对于每个 $\xi \in \mathbf{R}^n$, $[\tilde{X}, B(\xi)] = 0$, 其中 $B(\xi)$ 是与 ξ 对应的标准水平向量场;

(4) $L_X \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ L_X = \nabla_{[X,Y]}$ 对于 M 上的每个向量场 Y 成立.

证明　令 φ_t 是由 X 生成的 M 的局部单参数变换群并且对于每个 t, 令 $\tilde{\varphi}_t$ 是由 φ_t 诱导的 P 的局部变换.

(i) (1) $\to$ (2). 由命题 1.4, $\tilde{\varphi}_t$ 保持 ω, 从而有 (2) 成立.

(ii) (2) $\to$ (3). 对于每个向量场 X 都有 (命题 2.1)

$$0 = \tilde{X}(\theta(B(\xi))) = (L_{\tilde{X}}\theta)(B(\xi)) + \theta([\tilde{X}, B(\xi)]) = \theta([\tilde{X}, B(\xi)]),$$

这意味着 $[\tilde{X}, B(\xi)]$ 是垂直的. 如果 $L_{\tilde{X}}\omega = 0$, 那么

$$0 = \tilde{X}(\omega(B(\xi))) = (L_{\tilde{X}}\omega)(B(\xi)) + \omega([\tilde{X}, B(\xi)]) = \omega([\tilde{X}, B(\xi)]),$$

这意味着 $[\tilde{X}, B(\xi)]$ 是水平的, 从而 $[\tilde{X}, B(\xi)] = 0$.

(iii) (3) $\to$ (1). 如果 $[\tilde{X}, B(\xi)] = 0$, 那么 $\tilde{\varphi}_t$ 使 $B(\xi)$ 保持不变, 因而只要 $\tilde{\varphi}_t(u)$ 有定义, 则 $\tilde{\varphi}_t$ 将 u 点的水平子空间映射为 $\tilde{\varphi}_t(u)$ 点的水平子空间. 因此 $\tilde{\varphi}_t$ 保持联络 $\varGamma$ 而且 X 是 M 的无穷小仿射变换.

(iv) (1) $\to$ (4). 由命题 1.4, 对 M 上的任何向量场 Y 和 Z, 均有

$$\varphi_t(\nabla_Y Z) = \nabla_{\varphi_t Y}(\varphi_t Z).$$

从第一章 1.3 节给出的 Lie 微分的定义得出

$$L_X \circ \nabla_Y Z = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\nabla_Y Z - \varphi_t(\nabla_Y Z)]$$

$$
\begin{aligned}
&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\nabla_Y Z-\nabla_{\varphi_t Y}Z]+\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\nabla_{\varphi_t Y}Z-\nabla_{\varphi_t Y}(\varphi_t Z)]\\
&=\nabla_{L_X Y}Z+\nabla_Y\circ L_X Z=\nabla_{[X,Y]}Z+\nabla_Y\circ L_X Z.
\end{aligned}
$$

这就在 K 是向量场时验证了公式

$$L_X\circ\nabla_Y K-\nabla_Y\circ L_X K=\nabla_{[X,Y]}K.$$

若 K 是一个函数, 则上面的公式显然成立. 于是由第一章命题 3.3 的引理. 该公式对于任何张量场 K 成立.

(v) (4) $\to$ (1). 固定一点 $x\in M$, 并且置

$$V(t)=(\varphi_t(\nabla_Y Z))_x,\quad W(t)=(\nabla_{\varphi_t Y}(\varphi_t Z))_x.$$

对每一个 t, $V(t)$ 和 $W(t)$ 都是 $T_x(M)$ 中的元素. 根据命题 1.4, 只需证明 $V(t)=W(t)$ 就行了. 如同 (iv) 中那样可以得到

$$
\begin{aligned}
dV(t)/dt=&\varphi_t((L_X\circ\nabla_Y Z)_{\varphi_t^{-1}(x)}),\\
dW(t)/dt=&\varphi_t((\nabla_{[X,Y]}Z+\nabla_Y\circ L_X Z)_{\varphi_t^{-1}(x)}).
\end{aligned}
$$

从题设条件即可得到 $dV(t)/dt=dW(t)/dt$. 另一方面, 显然有 $V(0)=W(0)$. 从而 $V(t)=W(t)$. 证毕.

令 $\mathfrak{a}(M)$ 是 M 的无穷小仿射变换的集合. 那么 $\mathfrak{a}(M)$ 形成 M 上所有向量场构成的 Lie 代数 $\mathfrak{X}(M)$ 的一个子代数. 实际上, 在命题 2.1 中定义的对应 $X\to\tilde{X}$ 是从 M 上向量场的 Lie 代数 $\mathfrak{X}(M)$ 到 P 上向量场的 Lie 代数 $\mathfrak{X}(P)$ 的一个同构. 令 $\mathfrak{a}(P)$ 是 P 上满足命题 2.1 的 (1) 和 (2) 而且还满足命题 2.2 的 (2) 的向量场 X 的集合. 因为 $L_{[X,X']}=L_X\circ L_{X'}-L_{X'}\circ L_X$(参看第一章命题 3.4), 所以 $\mathfrak{a}(P)$ 构成 Lie 代数 $\mathfrak{X}(P)$ 的一个子代数. 由此可知 $\mathfrak{a}(M)$ 是 $\mathfrak{X}(M)$ 的一个子代数并且在命题 2.1 定义的对应 $X\to\tilde{X}$ 之下同构于 $\mathfrak{a}(P)$.

定理 2.3 若 M 是一个带仿射联络 Γ 的连通流形, 那么 M 的无穷小仿射变换构成的 Lie 代数 $\mathfrak{a}(M)$ 至多是 n^2+n 维的, 其中 $n=\dim\ M$. 若 $\dim\ \mathfrak{a}(M)=n^2+n$, 则 Γ 是平坦的, 即 Γ 的曲率和挠率都恒为零.

证明 要证明第一个论断只需证明 $\mathfrak{a}(P)$ 至多是 n^2+n 维的就可以了, 因为 $\mathfrak{a}(M)$ 同构于 $\mathfrak{a}(P)$. 令 u 是 P 的任意一点. 下列引理蕴涵着由 $f(\tilde{X})=\tilde{X}_u$ 定义的线性映射 $f:\mathfrak{a}(P)\to T_u(P)$ 是内射, 因而 $\dim\ \mathfrak{a}(P)\leqslant\dim\ T_u(P)=n^2+n$. 证毕.

引理 若 $\mathfrak{a}(P)$ 的元素 $\tilde{X}$ 在 P 的某一点上为零, 则它在 P 上恒为零.

引理的证明 如果 $\tilde{X}_u=0$, 那么对于每个 $a\in G$, $\tilde{X}_{ua}=0$, 因为 $\tilde{X}$ 是经 R_a 作用不变的 (参看命题 2.1). 令 F 是使得 $\tilde{X}_u=0$ 的点 $x=\pi(u)\in M$ 的集合. 那

么 F 在 M 中是闭的. 因为 M 是连通的, 所以只需证明 F 是开的. 假设 $\tilde{X}_u = 0$. 令 b_t 是 u 的一个邻域上的标准水平向量场 $B(\xi)$ 生成的局部单参数变换群. 因为由命题 2.2, $[\tilde{X}, B(\xi)] = 0$, 所以 $\tilde{X}$ 是经 b_t 作用不变的. 从而 $\tilde{X}_{b_t u} = 0$. 由法坐标系的定义 (参看第三章 3.8 节) 可以看出, 当 ξ 和 t 变化时, 形如 $\pi(b_t u)$ 的点复盖 $x = \pi(u)$ 的一个邻域. 这证明 F 是开的.

为证明第二个论断, 我们假定 $\dim \mathfrak{a}(M) = \dim \mathfrak{a}(P) = n^2 + n$. 令 u 是 P 的任意一点. 那么线性映射 $f : f(\tilde{X}) = \tilde{X}_u$ 将 $\mathfrak{a}(P)$ 映射到 $T_u(P)$ 上. 特别, 给定任何元素 $A \in \mathfrak{g}$, 都存在 (唯一的) 一个元素 $\tilde{X} \in \mathfrak{a}(P)$ 使得 $\tilde{X}_u = A^*_u$, 其中 A^* 表示对应于 A 的基本向量场. 令 $B = B(\xi)$ 和 $B' = B(\xi')$ 分别是对应于 ξ 和 ξ' 的标准水平向量场. 那么

$$X_u(\Theta(B, B')) = A^*_u(\Theta(B, B')).$$

分别计算这个等式的两边. 从 $L_X\Theta = L_X(d\theta + \omega \wedge \theta) = 0$ 和命题 2.2 的 (3) 得到

$$X(\Theta(B, B')) = (L_X\Theta)(B, B') + \Theta([X, B], B') + \Theta(B, [X, B']) = 0.$$

为了计算等式的右边, 首先注意到将外微分算子 d 应用第一结构方程则得出

$$0 = -\Omega \wedge \theta + \omega \wedge \Theta + d\Theta.$$

从而有

$$\begin{aligned} L_{A^*}\Theta =& (d \circ i_{A^*} + i_{A^*} \circ d)\Theta = i_{A^*} \circ d\Theta \\ =& i_{A^*}(\Omega \wedge \theta - \omega \wedge \Theta) = -\omega(A^*) \cdot \Theta \end{aligned}$$

和

$$(L_{A^*}\Theta)(B, B') = -A \cdot \Theta(B, B').$$

因此,

$$A^*(\Theta(B, B')) = -A \cdot \Theta(B, B') + \Theta([A^*, B], B') + \Theta(B, [A^*, B']).$$

若将 A 取为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n; \mathbf{R})$ 的单位矩阵, 那么由第三章的命题 2.3 则有

$$[A^*, B] = B, \quad [A^*, B'] = B'.$$

因而有

$$\begin{aligned} 0 =& X_u(\Theta(B, B')) = A^*_u(\Theta(B, B')) \\ =& -\Theta_u(B, B') + \Theta_u(B, B') + \Theta_u(B, B') = \Theta_u(B, B'), \end{aligned}$$

这证明挠率形式为零.

类似地, 比较等式

$$X_u(\Omega(B,B')) = A_u^*(\Omega(B,B'))$$

的两边并且令 A 等于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n;R)$ 的单位矩阵, 即可看出曲率形式恒为零. 证毕.

现在我们来证明下列属于 Kobayashi[2] 的结果.

定理 2.4 令 Γ 是 M 上的完备线性联络. 那么 M 的每个无穷小仿射变换 X 是完备的, 即 X 可生成 M 的整体单参数仿射变换群.

证明 只需在 M 为连通的假设下证明 $\mathfrak{a}(P)$ 的每个元素 $\tilde{X}$ 是完备的就行了. 令 u_0 是 P 的一个任意点. 令 $\tilde{\varphi}_t : U \to P(|t| < \delta)$ 是由 $\tilde{X}$ 生成的局部单参数变换群 (参看第一章命题 1.5). 我们将要证明 $\tilde{\varphi}_t(u)$ 对于每个 $u \in P$ 和 $|t| < \delta$ 有定义. 那么由此可知 $\tilde{X}$ 是完备的.

由第三章的命题 6.5. 每个标准水平向量场 $B(\xi)$ 是完备的, 这是因为联络是完备的. 给定 P 的任何点 u, 都存在标准水平向量场 $B(\xi_1), \cdots, B(\xi_k)$ 和元素 $a \in G$ 使得

$$u = (b_{t_1}^1 \circ b_{t_2}^2 \circ \cdots \circ b_{t_k}^k u_0)a,$$

其中每个 $b_{t_i}^i$ 是由 $B(\xi_i)$ 生成的 P 的单参数变换群. 事实上, 法坐标邻域的存在性 (参看第三章命题 8.2) 和 M 的连通性蕴涵着可以用有限段依次连接的测地线将 $x = \pi(u)$ 点连接到 $x_0 = \pi(u_0)$ 点. 由第三章的命题 6.3, 每条测地线都是某个标准水平向量场的积分曲线的射影. 这意味着通过选取适当的 $B(\xi_1), \cdots, B(\xi_k)$, 即可得到与 u 在同一纤维中的点 $v = b_{t_1}^1 \circ b_{t_2}^2 \circ \cdots \circ b_{t_k}^k u_0$. 那么对于某个适当的 $a \in G$ 就有 $u = va$, 从而证明了我们的论断. 然后定义 $\tilde{\varphi}_t(u)$ 为

$$\tilde{\varphi}_t(u) = (b_{t_1}^1 \circ b_{t_2}^2 \circ \cdots \circ b_{t_k}^k(\tilde{\varphi}_t(u_0)))a, \quad |t| < \delta.$$

$\tilde{\varphi}_t(u)$ 不依赖于 $b_{t_1}^1, \cdots, b_{t_k}^k$ 及 a 的选取和 $\tilde{\varphi}_t$ 是由 $\tilde{X}$ 生成的事实可以从命题 2.1 的 (1) 和命题 2.2 的 (3) 得出; 注意到命题 2.2 的 (3) 蕴涵着当它们都有定义时, 则有 $b_s \circ \tilde{\varphi}_t(u) = \tilde{\varphi}_t \circ b_s(u)$. 证毕.

一般, M 的仿射变换群 $\mathfrak{A}(M)$ 的 Lie 代数的每一个元素均产生 $\mathfrak{a}(M)$ 的一个元素而且该元素是完备的, 并且反过来也成立. 换句话说, $\mathfrak{A}(M)$ 的 Lie 代数可等同于由完备向量场组成的 $\mathfrak{a}(M)$ 的子代数. 定理 2.4 意味着若联络是完备的, 那么 $\mathfrak{a}(M)$ 可以看作 $\mathfrak{A}(M)$ 的 Lie 代数.

对于 M 上的任何向量场 X, 导算子 $A_X = L_X - \nabla_X$ 是由 $(1,1)$ 型张量场诱导的, 因为它在函数代数 $\mathfrak{F}(M)$ 上为零 (参看第一章命题 3.3 的证明), 这个事实也可以从下列命题导出.

命题 2.5 对于 M 上的任何向量切 X 和 Y, 均有下式成立:

$$A_X Y = -\nabla_Y X - T(X,Y),$$

其中 T 是挠率.

证明 由第三章定理 5.1,

$$\begin{aligned}A_XY =& L_XY - \nabla_XY = [X,Y] - (\nabla_YX + [X,Y] + T(X,Y))\\ =& -\nabla_YX - T(X,Y). \quad \text{证毕.}\end{aligned}$$

我们以下列命题来结束本节.

命题 2.6 (1) M 上的向量场 X 为一个无穷小仿射变换当且仅当对 M 上的每个向量场 Y, 均有

$$\nabla_Y(A_X) = R(X,Y).$$

(2) 如果 X 和 Y 都是 M 的无穷小仿射变换, 那么

$$A_{[X,Y]} = [A_X, A_Y] - R(X,Y),$$

其中 R 表示曲率.

证明 (1) 由第三章的定理 5.1, 有

$$\begin{aligned}R(X,Y) =& [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]} = [L_X - A_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}\\ =& [L_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]} - [A_X, \nabla_Y].\end{aligned}$$

由命题 2.2, X 是一个无穷小仿射变换当且仅当对于每一个 Y, $R(X,Y) = -[A_X, \nabla_Y]$, 即当且仅当对所有 Y 和 Z,

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y(A_XZ) - A_X(\nabla_YZ) = (\nabla_Y(A_X))Z.$$

(2) 由第三章的定理 5.1 和 (本章的) 命题 2.2, 就有

$$\begin{aligned}[A_X, A_Y] - A_{[X,Y]} =& [L_X - \nabla_X, L_Y - \nabla_Y] - (L_{[X,Y]} - \nabla_{[X,Y]})\\ =& [L_X, L_Y] - [\nabla_X, L_Y] - [L_X, \nabla_Y]\\ &+ [\nabla_X, \nabla_Y] - L_{[X,Y]} + \nabla_{[X,Y]}\\ =& R(X,Y). \quad \text{证毕.}\end{aligned}$$

6.3 等距变换与无穷小等距

令 M 是一个带有 Riemann 度量 g 和相应 Riemann 联络 Γ 的流形. M 的等距变换是保持度量 g 不变的变换. 从第四章的命题 2.5 可知 M 的等距变换必然是 M 关于 Γ 的仿射变换.

考虑 M 上的规范正交标架丛 $O(M)$, 它是 M 上的线性标架丛 $L(M)$ 的一个子丛.

命题 3.1 (1) M 的一个变换 f 是等距变换当且仅当 $L(M)$ 的诱导变换 $\tilde{f}$ 将 $O(M)$ 映射成它自身;

(2) 使 $O(M)$ 上的标准形式 θ 不变的 $O(M)$ 的保纤维变换 F 是由 M 的等距变换诱导的.

证明 (1) 该结论可从下列事实得出: M 的变换 f 是等距变换当且仅当它把任意点 x 处的每个规范正交标架映射成 $f(x)$ 点的规范正交标架.

(2) 令 f 是由 F 诱导的底流形 M 上的变换. 置 $J=\tilde{f}^{-1}\circ F$. 那么 J 是使 θ 保持不变的从 $O(M)$ 到 $L(M)$ 的保纤维变换, 而且 J 诱导底流形 M 上的恒等变换. 因此有

$$u^{-1}(X)=\theta(X^*)=\theta(JX^*)=J(u)^{-1}(X),\quad X^*\in T_u(O(M)),\ X=\pi(X^*).$$

这就蕴涵着 $J(u)=u$, 即 $\tilde{f}(u)=F(u)$. 由 (1), f 是 M 的一个等距变换. 证毕.

对于 M 上的向量场 X, 若在 M 的每一点的邻域中由 X 生成的局部单参数变换群都是由局部等距变换组成的, 则将该向量场 X 称为无穷小等距变换 (或者称为 Killing 向量场). 无穷小等距变换必定是无穷小仿射变换.

命题 3.2 对于 Riemann 流形 M 上的向量场 X, 下列条件互相等价:

(1) X 是无穷小等距变换;

(2) X 到 $L(M)$ 上的自然提升 $\tilde{X}$ 在 $O(M)$ 的每一点处都与 $O(M)$ 相切;

(3) $L_Xg=0$, 其中 g 是 M 的度量张量场;

(4) (1,1) 型张量场 $A_X=L_X-\nabla_X$ 在 M 上关于 g 处处是斜对称的, 即对任意向量场 Y 和 Z, $g(A_XY,Z)=-g(A_XZ,Y)$.

证明 (i) 为证明 (1) 和 (2) 的等价性, 令 φ_t 和 $\tilde{\varphi}_t$ 分别是由 X 和 $\tilde{X}$ 生成的局部单参数变换群. 若 X 是一个无穷小等距变换, 那么 φ_t 是局部等距变换. 因而 $\tilde{\varphi}_t$ 将 $O(M)$ 映射为其自身. 从而 $\tilde{X}$ 在 $O(M)$ 的每一点处都与 $O(M)$ 相切. 反过来, 若 $\tilde{X}$ 在 $O(M)$ 的每一点均切于 $O(M)$, 那么 $\tilde{X}$ 的经过 $O(M)$ 每一点的积分曲线均包含在 $O(M)$ 中, 因而每个 $\tilde{\varphi}_t$ 将 $O(M)$ 映射成其自身. 由命题 3.1, 这意味着每个 φ_t 都是局部等距变换, 因此 X 是一个无穷小等距.

(ii) (1) 与 (3) 的等价性从第一章的推论 3.7 得出.

(iii) 因为对任何向量场 X, $\nabla_Xg=0$, 所以 $L_Xg=0$ 等价于 $A_Xg=0$. 因为 A_X 是张量场代数的导算子, 于是对 $Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$,

$$A_X(g(Y,Z))=(A_Xg)(Y,Z)+g(A_XY,Z)+g(Y,A_XZ).$$

因为 A_X 把每一个函数都映射为零, 所以 $A_X(g(Y,Z))=0$. 因此 $A_Xg=0$ 当且仅当对所有 Y 和 Z, $g(A_XY,Z)+g(Y,A_XZ)=0$, 从而证明了 (3) 和 (4) 的等价性. 证毕.

M 的所有无穷小等距变换的集合构成一个 Lie 代数, 记为 $\mathfrak{i}(M)$. 实际上, 若 X 和 Y 都是 M 的无穷小等距变换, 则由命题 3.2,

$$L_{[X,Y]}g=L_X\circ L_Yg-L_Y\circ L_Xg=0.$$

由同一命题可知, $[X,Y]$ 是 M 的一个无穷小等距变换.

定理 3.3 一个连通 Riemann 流形 M 的无穷小等距变换组成的 Lie 代数 $\mathfrak{i}(M)$ 至多是 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 维的, 其中 $n=\dim\ M$. 如果 $\dim\ \mathfrak{i}(M)=\frac{1}{2}n(n+1)$, 则 M 是一个常曲率空间.

证明 为证明第一个论断, 只需证明对 $O(M)$ 的任何点 u, 线性映射 $X\to\tilde{X}_u$ 把 $i(M)$ 一一地应映射到 $T_u(O(M))$ 中. 由命题 3.2, $\tilde{X}_u$ 必定是 $T_u(O(M))$ 中的元素. 若 $\tilde{X}_u=0$, 则定理 2.3 的证明说明 $X=0$. 现在来证明第二个论断.

令 X,X' 是 $T_x(M)$ 中的平面 p 的规范正交基. 令 u 是 $O(M)$ 的一点使得 $\pi(u)=x$. 置 $\xi=u^{-1}(X),\xi'=u^{-1}(X'),B=B(\xi),B'=B(\xi')$, 其中 $B(\xi)$ 和 $B(\xi')$ 分别是对应于 ξ 和 ξ' 的标准水平向量场在 $O(M)$ 上的限制. 从第三章 3.5 节给出的曲率变换的定义即可看出截曲率 $K(p)$(参看第五章 5.2 节) 由下式给出

$$K(p)=((2\Omega(B_u,B'_u))\xi',\xi).$$

其中 (,) 表示 $\mathbf{R}^n$ 的自然内积. 为了证明 $K(p)$ 不依赖于 p, 令 Y,Y' 是 $T_x(M)$ 中另一平面 q 的规范正交基. 令 $\eta=u^{-1}(Y),\eta'=u^{-1}(Y')$. 令 a 是 $SO(n)$ 中的一个元素且使得 $a\xi=\eta,a\xi'=\eta'$. 由第三章的命题 2.2, 则有

$$\begin{aligned}\Omega(B(\eta)_u,B(\eta')_u)=&\Omega(B(a\xi)_u,B(a\xi')_u)=\Omega(R_{a^{-1}}(B_{ua}),R_{a^{-1}}(B'_{ua}))\\=&\mathrm{ad}(a)(\Omega(B_{ua},B'_{ua}))=a\cdot\Omega(B_{ua},B'_{ua})\cdot a^{-1}.\end{aligned}$$

因此截曲率 $K(q)$ 由下式给出:

$$\begin{aligned}K(q)=&((2\Omega(B(\eta)_u,B(\eta')_u)\eta',\eta)\\=&((a\cdot2\Omega(B_{ua},B'_{ua})\cdot a^{-1})a\xi',a\xi)\\=&((2\Omega(B_{ua},B'_{ua}))\xi',\xi).\end{aligned}$$

为了证明 $K(p)=k(q)$, 只需证明 $\Omega(B_{ua},B'_{ua})=\Omega(B_u,B'_u)$ 即可. 给定任何垂直向量 $X^*\in T_v(O(M))$, 其中 $\pi(v)=x$, 那么若 $\dim\ \mathfrak{i}(M)=\frac{1}{2}n(n+1)$, 则存在一个元

素 $x \in \mathfrak{i}(M)$ 使得 $\tilde{X}_v = X^*_v$, 因为映射 $X \to \tilde{X}_v$ 把 $\mathfrak{i}(M)$ 映射到 $T_v(O(M))$ 上. 于是有

$$\tilde{X}(\Omega(B,B')) = (L_{\tilde{X}}\Omega)(B,B') + \Omega([\tilde{X},B],B') + \Omega(B,[\tilde{X},B']) = 0.$$

这就蕴涵着对于每个 $a \in SO(n)$, $\Omega(B_u, B'_u) = \Omega(B_{ua}, B'_{ua})$. 从而证明了 $K(p)$ 只依赖于点 x. 我们还要证明 $K(p)$ 甚至也不依赖于 x. 给定任何向量 $Y^* \in T_u(O(M))$, 令 Y 是 $\mathfrak{i}(M)$ 中的元素并且使得 $\tilde{Y}_u = Y^*$. 那么又有 $\tilde{Y}(\Omega(B,B')) = 0$. 因此对于固定的 ξ 和 ξ', 函数 $((2\Omega(B,B'))\xi', \xi)$ 在 u 的一个邻域中为常数. 这意味着 $K(p)$ 看作 M 上的函数局部为常数. 因为它是连续的并且 M 是连通的, 所以它在整个 M 上必定为常数. (若 $\dim M \geqslant 3$, 则 $K(p)$ 不依赖于 x 的事实还可以从第五章的定理 2.2 得出.) 证毕.

定理 3.4 (1) 对具有有限个连通分支的 Riemann 流形 M 而言, 它的等距变换群 $\mathfrak{I}(M)$ 关于 M 的紧开拓扑是一个 Lie 变换群;

(2) $\mathfrak{I}(M)$ 的 Lie 代数自然同构于所有完备无穷小等距变换构成的 Lie 代数;

(3) $\mathfrak{I}(M)$ 在任意点 x 处的迷向子群 $\mathfrak{I}_x(M)$ 是紧的;

(4) 若 M 是完备的, 那么 $\mathfrak{I}(M)$ 的 Lie 代数自然同构于 M 的所有无穷小等距变换构成的 Lie 代数 $\mathfrak{i}(M)$;

(5) 如果 M 是紧的, 那么群 $\mathfrak{I}(M)$ 也是紧的.

证明 (1) 正如我们在定理 1.5 的证明中所指出的那样, 本款可从第一章的定理 4.6 和推论 4.9 以及第四章的定理 3.10 得出.

(2) $\mathfrak{I}(M)$ 的每个单参数子群诱导一个无穷小等距变换 X 并且它在 M 上是完备的; 反过来, 每一个完备的无穷小等距 X 生成 $\mathfrak{I}(M)$ 的一个单参数子群.

(3) 本款从第一章的推论 4.8 得出.

(4) 本款从 (2) 和定理 2.4 得出.

(5) 本款从第一章的推论 4.10 得出. 证毕.

显然 $\mathfrak{I}(M)$ 是 $\mathfrak{A}(M)$ 的一个闭子群. 我们将会看到在许多情况下, $\mathfrak{I}(M)$ 的单位分支 $\mathfrak{I}^0(M)$ 与 $\mathfrak{A}(M)$ 的单位分支 $\mathfrak{A}^0(M)$ 是一致的. 我们首先来证明由 Hano[1] 得到的一个结果.

定理 3.5 若 $M = M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_k$ 是单连通的完备 Riemann 流形 M 的 de Rham 分解, 那么

$$\mathfrak{A}^0(M) \approx \mathfrak{A}^0(M_0) \times \mathfrak{A}^0(M_1) \times \cdots \times \mathfrak{A}^0(M_k),$$
$$\mathfrak{I}^0(M) \approx \mathfrak{I}^0(M_0) \times \mathfrak{I}^0(M_1) \times \cdots \times \mathfrak{I}^0(M_k).$$

证明 定理的证明需要下列两个引理. 证毕.

引理 1 令 $T_x(M) = \Sigma_{i=0}^k T_0^{(i)}$ 是标准分解.

(1) 如果 $\varphi \in A(M)$, 那么 $\varphi(T_x^{(0)}) = T_{\varphi(x)}^{(0)}$ 并且对于每个 $i(1 \leqslant i \leqslant k)$ 都有某个 $j(1 \leqslant j \leqslant k)$ 使得 $\varphi(T_x^{(i)}) = T_{\varphi(x)}^{(j)}$ 成立;

(2) 若 $\varphi \in A^0(M)$, 则对每个 $i(0 \leqslant i \leqslant k)$ 都有 $\varphi(T_x^{(i)}) = T_{\varphi(x)}^{(i)}$.

引理 1 的证明 令 τ 是 x 点处的任何圈并且置 $\tau' = \varphi(\tau)$, 因而 τ' 是 $\varphi(x)$ 处的圈. 若用相同的字母 τ 和 τ' 分别表示沿 τ 和 τ' 的平行移动. 那么

$$\varphi \circ \tau(X) = \tau' \circ \varphi(X), \quad X \in T_x(M).$$

由此可知, $\varphi(T_x^{(0)})$ 是按元素不变的并且每个 $\varphi(T_x^{(i)})(1 \leqslant i \leqslant k)$ 关于线性和乐群 $\Psi(\varphi(x))$ 是不可约的. 从而 $\varphi(T_x^{(0)}) \subset T_{\varphi(x)}^{(0)}$ 并且它们的维数相同, 所以 $\varphi(T_x^{(0)}) = T_{\varphi(x)}^{(0)}$. 因而得到标准分解 $T_{\varphi(x)} = \Sigma_{i=0}^k \varphi(T_x^{(i)})$ 而且由第四章定理 5.4 的 (4), 在不计项序的条件下它与标准分解 $T_{\varphi(x)} = \Sigma_{i=0}^k T_{\varphi(x)}^{(i)}$ 应当是一致的. 这恰好意味着论断 (1) 成立. 令 φ_t 是 $A^0(M)$ 的一个单参数子群, 令 X 是 $T_x^{(0)}$ 的一个非零元. 令 $\tau = x_t = \varphi_t(x)$. 因为 $g(\varphi_0(X), X) = g(X, X) \neq 0$, 所以对于某个 $\delta > 0$ 和 $|t| < \delta$, $g(\varphi_t(X), \tau_t^0 X) \neq 0$, 其中 τ_t^0 表示从 x_0 到 x_t 沿 τ 的平行移动. 这意味着对于某个正数 δ' 和 $|t| < \delta'$, $\varphi(T_x^{(i)}) = T_{\varphi(x)}^{(i)}$. 事实上, 如果 $X_1, \cdots, X_r$ 是 $T_x^{(i)}$ 的基, 那么对于某个正数 $\delta', |t| < \delta'$ 和 $1 \leqslant j \leqslant r, g(\varphi_t(X_j), \tau_t^0 X_j) \neq 0$. 从而对于 $|t| < \delta', \varphi_t(X_j) \in T_{\varphi_t(x)}^{(i)}$, 这蕴涵着对于 $|t| < \delta, \varphi_t(T_x^{(i)}) = T_{\varphi_t(x)}^{(i)}$, 这是因 φ_t 具有线性性质. 这就完成了论断 (2) 的证明, 因为 $\mathfrak{A}^0(M)$ 是由单参数子群生成的.

引理 1 归功于 Nomizu[3].

引理 2 对于每个 $i(0 \leqslant i \leqslant k)$, 令 φ_i 是 M_i 的一个任意变换. 令 φ 是由下式定义的 $M = M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_k$ 的变换:

$$\varphi(x) = (\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1), \cdots, \varphi_k(x_k)), \quad x = (x_0, x_1, \cdots, x_k) \in M.$$

那么

(1) φ 是 M 的仿射变换当且仅当每个 φ_i 是 M_i 的仿射变换.

(2) φ 是 M 的等距变换当且仅当每个 φ_i 是 M_i 的等距变换.

本引理的证明是平凡的.

在引理 2 中定义的对应 $(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_k) \to \varphi$ 将 $\mathfrak{A}(M_0) \times \mathfrak{A}(M_1) \times \cdots \times \mathfrak{A}(M_k)$ 同构地映射成 $\mathfrak{A}(M)$. 为完成定理 3.5 的证明, 只需证明对于每个 $\varphi \in \mathfrak{A}^0(M)$, 均存在变换 $\varphi_i : M_i \to M_i(0 \leqslant i \leqslant k)$ 使得

$$\varphi(x) = (\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1), \cdots, \varphi_k(x_k)), \quad x = (x_0, x_1, \cdots, x_k) \in M.$$

现在证明若用 $p_i : M \to M_i$ 表示自然射影, 那么 $p_i(\varphi(x))$ 只依赖于 $x_i = p_i(x)$. 给定任何点 $y = (y_0, \cdots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \cdots, y_k)$, 对于每个 $j = 0, 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, k$,

令 $\tau_j = x_j(t)(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是 M_j 中从 x_j 到 y_j 的曲线使得 $x_j(0) = x_j, x_j(1) = y_j$. 令 $\tau = x(t)(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是 M 中由下式定义的从 x 到 y 的一条曲线:

$$x(t) = (x_0(t), x_1(t), \cdots, x_{i-1}(t), x_i, x_{i+1}(t), \cdots, x_k(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

对于每一个 t, τ 在 $x(t)$ 点的切向量 $\dot{x}(t)$ 处于分布 $T^{(0)} + \cdots + T^{(i-1)} + T^{(i+1)} + \cdots + T^{(k)}$ 中. 由引理 1, $\varphi(\dot{x}(t))$ 也处在同一分布之中. 因此 $p_i(\varphi(x(t)))$ 不依赖于 t(参看第二章定理 7.2 的引理 2). 特别地 $p_i(\varphi(x)) = p_i(\varphi(y))$. 从而证明了我们的论断. 然后用

$$\varphi_i(x_i) = p_i(\varphi(x))$$

定义一个变换 $\varphi_i : M_i \to M_i$. 那么显然有

$$\varphi(x) = (\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1), \cdots, \varphi_k(x_k)).$$

证毕.

因此在 M 为不可约时来研究 $\mathfrak{A}(M)$ 是重要的. 下列结果归功于 Kobayashi[4].

定理 3.6 如果 M 是完备的不可约的 Riemann 流形. 那么除去 M 是一维 Euclid 空间之外, 均有 $\mathfrak{A}(M) = \mathfrak{I}(M)$.

证明 对于 Riemann 流形的变换 φ 来说, 如果存在一个正常数 c 使得 $g(\varphi(X), \varphi(Y)) = c^2 g(X, Y)$ 对所有 $X, Y \in T_x(M)$ 和 $x \in M$ 成立, 则将该变换 φ 称为相似变换. 考虑由 $g^*(X,Y) = g(\varphi(X), \varphi(Y))$ 定义的 Riemann 度量 g^*. 从第三章定理 2.2 的证明 (B) 可以看出由 g^* 定义的 Riemann 联络与 g 所定义的 Riemann 联络是一致的. 这意味着 Riemann 流形 M 的每个相似变换均为 M 的仿射变换. 证毕.

引理 1 若 M 为不可约 Riemann 流形. 那么 M 的每个仿射变换 φ 均为相似变换.

引理 1 的证明 因为 φ 是仿射变换, 所以上面定义的两个 Riemann 度量 g 和 g^* 决定同一个 Riemann 联络 Γ. 令 $\Psi(x)$ 是 Γ 关于基点 x 的线性和乐群. 因为它是不可约的并且使 g 和 g^* 均保持不变, 所以存在一个正常数 c_x 使得 $g^*(X,Y) = c_x^2 \cdot g(X,Y)$ 对所有 $X, Y \in T_x(M)$ 成立, 即 $g_x^* = c_x^2 \cdot g_x$(参看附录 5 的定理 1). 因为 g^* 和 g 都是关于 Γ 的平行张量场, 所以 c_x 为常数.

引理 2 若 M 是一个完备 Riemann 流形但不是局部 Euclid 的, 那么 M 的每个相似变换 φ 都是等距变换.

引理 2 的证明 假设 φ 是 M 的一个非等距相似变换. 必要时考虑其逆变换, 则可以假设伴随于 φ 的常数 c 小于 1. 取 M 的任一点 x, 如果 x 与 $\varphi(x)$ 之间的距离小于 δ, 那么 $\varphi^m(x)$ 与 $\varphi^{m+1}(x)$ 之间的距离就小于 $c^m\delta$. 由此可知 $\{\varphi^m(x); m = 1, 2, \cdots\}$ 是一个 Cauchy 序列, 因而收敛于某一点 x^*, 因为 M 是完备的. 容易看出 x^* 是在 φ 作用下的不动点.

令 U 是 x^* 的一个邻域使得 $\bar{U}$ 是紧的. 令 K^* 是一个正数使得 $|g(R(Y_1, Y_2)Y_2, Y_1)| < K^*$ 对 $y \in U$ 点处的任何单位向量 Y_1 和 Y_2 成立, 其中 R 表示曲率张量场. 令 $z \in M$ 且 q 是 $T_z(M)$ 中的任何平面. 令 X, Y 是 q 的规范正交基. 因为 φ 是仿射变换, 所以命题 1.2 的 (3) 蕴涵着

$$R(\varphi^m X, \varphi^m Y)(\varphi^m Y) = \varphi^m(R(X,Y)Y).$$

从而有

$$\begin{aligned} g(R(\varphi^m X, \varphi^m Y)(\varphi^m Y), \varphi^m X) =& g(\varphi^m(R(X,Y)Y), \varphi^m X) \\ = c^{2m} g(R(X,Y)Y, X) =& c^{2m} K(q). \end{aligned}$$

另一方面, 当 m 趋向于无穷时, $x^* = \varphi^m(x^*)$ 与 $\varphi^m(z)$ 之间的距离趋于 0. 换句话说, 存在一个整数 m_0 使得对于每个 $m \geqslant m_0$ 都有 $\varphi^m(z) \in U$. 因为向量 $\varphi^m X$ 和 $\varphi^m Y$ 的长度等于 c^m, 所以对于 $m \geqslant m_0$ 就有

$$c^{4m} K^* \geqslant |g(R(\varphi^m X, \varphi^m Y)(\varphi^m Y), \varphi^m X)|.$$

因而得到

$$c^{2m} K^* \geqslant |K(q)|, \quad m \geqslant m_0.$$

令 m 趋于无穷则有 $K(q) = 0$. 这说明 M 是局部 Euclid 的.　证毕.

令 X 是完备 Riemann 流形 M 上的无穷小仿射变换. 我们将用定理 3.5 和定理 3.6 求出关于 X 为无穷小等距变换的几个充分条件. 设 M 是连通的, 令 $\tilde{M}$ 是万有复盖流形并且带有自然诱导的 Riemann 度量 $\tilde{g} = p^*(g)$, 其中 $p : \tilde{M} \to M$ 是自然射影. 令 $\tilde{X}$ 是 M 上由 X 诱导的向量场并且 $\tilde{X}$ 与 X 是 p 相关的. 那么 $\tilde{X}$ 是 $\tilde{M}$ 的无穷小仿射变换. 显然, $\tilde{X}$ 是 $\tilde{M}$ 的无穷小等距当且仅当 X 是 M 的无穷小等距. 令 $\tilde{M} = M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_k$ 是单连通完备 Riemann 流形 $\tilde{M}$ 的 de Rham 分解. 由定理 3.5, Lie 代数 $\mathfrak{a}(\tilde{M})$ 同构于 $\mathfrak{a}(M_0) + \mathfrak{a}(M_1) + \cdots + \mathfrak{a}(M_k)$. 令 $(X_0, X_1, \cdots, X_k)$ 是 $\mathfrak{a}(M_0) + \mathfrak{a}(M_1) + \cdots + \mathfrak{a}(M_k)$ 中对应于 $\tilde{X} \in \mathfrak{a}(\tilde{M})$ 的元素. 因为由定理 3.6, $X_1, \cdots, X_k$ 都是无穷小等距, 所以 X 是无穷小等距当且仅当 X_0 是无穷小等距.

推论 3.7　若 M 是一个连通完备 Riemann 流形并且它的限制和乐群 $\Psi^0(x)$ 使得 x 点处没有非零向量是不动的, 那么 $\mathfrak{A}^0(M) = \mathfrak{I}^0(M)$.

证明　M 的线性和乐群自然同构于 M 的限制线性和乐群 $\Psi^0(x)$(参看第四章例 2.1). 这意味着按上面的记号, M_0 退化为一个点, 从而 $X_0 = 0$.　证毕.

推论 3.8　若 X 是完备 Riemann 流形的无穷小仿射变换并且 X 的长度是有界的, 那么 X 是无穷小等距变换.

证明 我们可以假定 M 是连通的. 如果 X 的长度在 M 上是有界的, 那么 X_0 的长度在 M_0 上也是有界的. 令 $x^1, \cdots, x^r$ 是 M_0 中的 Euclid 坐标系并且置

$$X_0 = \Sigma_{\alpha=1}^r \xi^\alpha (\partial/\partial x^\alpha).$$

将公式 $(L_{X_0} \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ L_{X_0})Z = \nabla_{[X,Y]}Z$(参看命题 2.2) 应用于 $Y = \partial/\partial x^\beta$ 和 $Z = \partial/\partial x^\gamma$, 即可看出

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = 0.$$

这意味着 X_0 具有下列形式

$$\Sigma_{\alpha=1}^r (\Sigma_{\beta=1}^r a_\beta^\alpha x^\beta + b^\alpha)(\partial/\partial x^\alpha).$$

容易看出 X_0 的长度在 M_0 上有界当且仅当 $a_\beta^\alpha = 0(\alpha, \beta = 1, \cdots, r)$. 因而若 X_0 的长度有界, 那么 X_0 是 M_0 的无穷小等距变换. 证毕.

由 Hano[1] 得到的推论 3.8 蕴涵着 Hano[1] 的下列结果, 但原来它是用完全不同的方法证明的.

推论 3.9 在紧 Riemann 流形 M 上则有 $\mathfrak{A}^0(M) = \mathfrak{I}^0(M)$.

证明 在紧 Riemann 流形 M 上, 每个向量场的向量都有有界的长度. 由推论 3.8, 每个无穷小仿射变换 X 都是无穷小等距. 证毕.

6.4 和乐等距与无穷小等距

令 M 是一个带有线性联络 Γ 的可微流形. 对于 M 的一个无穷小仿射变换 X, 现在我们给出 6.2 节中引进的张量场 $A_X = L_X - \nabla_X$ 的一种几何解释.

令 x 是 M 的任意一点, 令 φ_t 是由 X 在 x 的邻域中生成的局部单参数仿射变换群. 令 τ 是 x 的轨道 $x_t = \varphi_t(x)$. 用 τ_t^s 表示沿曲线 τ 从 x_s 到 x_t 的平行移动. 对于每个 t, 考虑 $T_x(M)$ 的线性变换 $C_t = \tau_0^t \circ (\varphi_t)_*$.

命题 4.1 C_t 是 $T_x(M)$ 的局部单参数线性变换群: $C_{t+s} = C_t \circ C_s$, 并且 $C_t = \exp(-t(A_X)_x)$.

证明 因为 φ_t 把 τ 的从 x_0 到 x_s 的部分映射成 τ 的从 x_t 到 x_{t+s} 的部分, 又因为 φ_t 跟平行移动是相容的, 故有

$$\varphi_t \circ \tau_0^s = \tau_t^{t+s} \circ \varphi_t.$$

从而

$$C_t \circ C_s = \tau_0^t \circ \varphi_t \circ \tau_0^s \circ \varphi_s = \tau_0^t \circ \tau_t^{t+s} \circ \varphi_t \circ \varphi_s = \tau_0^{t+s} \circ \varphi_{t+s} = C_{t+s}.$$

这就证明了第一个论断. 因而就有 $T_x(M)$ 的一个线性自同态 A 使得 $C_t = \exp\ tA$. 第二个论断说明 $A = -(A_X)_x$. 为了证明这一点, 我们来证明对于 $Y_x \in T_x(M)$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(C_t Y_x - Y_x) = -(A_X)_x Y_x.$$

首先考虑 $X_x \neq 0$ 的情况. 此时 x 有一个带局部坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 的坐标邻域使得对于小的 t 值, 曲线 $\tau = x_t$ 由 $x^1 = t, x^2 = \cdots = x^n = 0$ 给出. 因此可用下列方式将 Y_x 扩张成 M 上的向量场 Y : 对于小的 t 值, 令 $\varphi_t(Y_x) = Y_{x_t}$. 显然 $(L_X Y)_x = 0$. 从而有

$$\begin{aligned}
-(A_X)_x Y_x =& (\nabla_X Y)_x - (L_X Y)_x = (\nabla_X Y)_x \\
=& \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\tau_0^t Y_{x_t} - Y_x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\tau_0^t \circ \varphi_t Y_x - Y_x) \\
=& \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(C_t Y_x - Y_x).
\end{aligned}$$

其次再来考虑 $X_x = 0$ 的情况. 在此情况下, φ_t 是一个使 x 为不动点的局部单参数变换群而且平行移动 τ_0^t 化为 $T_x(M)$ 的恒等变换. 因而 $(\nabla_X Y)_x = 0$. 所以

$$\begin{aligned}
-(A_X)_x Y_x =& (\nabla_X Y)_x - (L_X Y)_x = -(L_X Y)_x \\
=& -\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(Y_x - \varphi_t Y_x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(C_t Y_x - Y_x).
\end{aligned}$$

这就完成了第二个论断的证明.　证毕.

评注　命题 4.1 实际上是第二章命题 11.2 的特殊情况. 自然可以从它导出.

命题 4.2　令 $N(\Psi(x))$ 和 $N(\Psi^0(x))$ 分别是线性和乐群 $\Psi(x)$ 和限制线性和乐群 $\Psi^0(x)$ 在 $T_x(M)$ 的线性变换群中的正规化子, 那么 C_t 不仅包含在 $N(\Psi^0(x))$ 中而且也包含在 $N(\Psi(x))$ 中.

证明　令 φ_t 和 τ_t^s 如前面所述. 对于 x 点处的任何圈 μ, 置 $\mu_t' = \varphi_t(\mu)$, 因而 μ_t' 是 $x_t = \varphi_t(x)$ 点处的圈. 分别用 μ 和 μ_t' 表示沿 μ 和 μ_t' 的平行移动. 那么 $\varphi_t \circ \mu = \mu_t' \circ \varphi_t$. 故有

$$C_t \circ \mu \circ C_t^{-1} = \tau_0^t \circ \varphi_t \circ \mu \circ \varphi_t^{-1} \circ \tau_t^0 = \tau_0^t \circ \mu_t' \circ \varphi_t \circ \varphi_t^{-1} \circ \tau_t^0 = \tau_0^t \circ \mu_t' \circ \tau_t^0.$$

这说明 $C_t \circ \mu \circ C_t^{-1}$ 是 $\Psi(x)$ 的元素. 若 μ 在 $\Psi^0(x)$ 中, 则 $C_t \circ \mu \circ C_t^{-1}$ 也在 $\Psi^0(x)$ 中. (注意到 $N(\Psi(x)) \subset N(\Psi^0(x))$, 因为 $\Psi^0(x)$ 是 $N(\Psi(x))$ 的单位分支.)　证毕.

推论 4.3　若 X 是 M 的无穷小仿射变换, 那么在每一点 $x \in M, (A_X)_x$ 属于 $\Psi(x)$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}(x)$ 在由 $T_x(M)$ 的自同态构成的 Lie 代数中的正规化子 $N(\mathfrak{g}(x))$.

回想到, 由定义, $N(\mathfrak{g}(x))$ 是使得对每个 $B \in \mathfrak{g}(x)$ 都有 $[A, B] \in \mathfrak{g}(x)$ 的 $T_x(M)$ 的线性自同态 A 的集合.

若 X 是 Riemann 流形 M 的无穷小等距, 那么 A_X 是斜对称的 (参看命题 3.2) 而且对于每个 t, C_t 是 $T_x(M)$ 的正交变换. 于是有

定理 4.4 令 M 是一个 Riemann 流形并且 $\mathfrak{g}(x)$ 是 $\Psi(x)$ 的 Lie 代数. 如果 X 是 M 的无穷小等距, 那么对于每个 $x \in M, (A_X)_x$ 在 $N(\mathfrak{g}(x))$ 中, 这里 $N(\mathfrak{g}(x))$ 是 $\mathfrak{g}(x)$ 在由 $T_x(M)$ 的斜对称线性自同态组成的 Lie 代数 $E(x)$ 中的正规化子.

下列定理归功于 Kostant[1].

定理 4.5 若 X 是紧 Riemann 流形 M 的无穷小等距变换, 那么对每一个 $x \in M, (A_X)_x$ 属于线性和乐群 $\Psi(x)$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}(x)$.

证明 在由 $T_x(M)$ 的斜对称自同态组成的 Lie 代数 $E(x)$ 中通过置

$$(A, B) = -\mathrm{tr}(AB)$$

而引进一个正定内积 (,). 令 $B(x)$ 是 $\mathfrak{g}(x)$ 在 $E(x)$ 中关于这个内积的正交补. 对于 M 上给定的无穷小等距 X, 置

$$A_X = S_X + B_X,$$

其中 $S_X \in \mathfrak{g}(x), B_X \in B(x), x \in M$. 证毕.

引理 (1, 1) 型张量场 B_X 是平行的.

引理的证明 令 τ 是从一点 x 到另一点 y 的一条任意曲线. 平行移动 τ 给出从 $E(x)$ 到 $E(y)$ 的一个将 $\mathfrak{g}(x)$ 映射到 $\mathfrak{g}(y)$ 上的同构. 因为 τ 保持 $E(x)$ 和 $E(y)$ 上的内积不变, 所以 τ 把 $B(x)$ 映射到 $E(y)$ 上. 这意味着对 M 上的每一个向量场 Y, 在 M 的每一点 $x, \nabla_Y(S_X)$ 在 $\mathfrak{g}(x)$ 中而 $\nabla_Y(B_X)$ 在 $B(x)$ 中. 另一方面, 公式 $\nabla_Y(A_X) = R(X, Y)$(参看命题 2.6) 蕴涵着在每一点 $x \in M, \nabla_Y(A_X)$ 属于 $\mathfrak{g}(x)$(参看第三章定理 9.1). 通过比较等式 $\nabla_Y(A_X) = \nabla_Y(B_X) + \nabla_Y(S_X)$ 的 $\mathfrak{g}(x)$ 分量和 $B(x)$ 分量, 可以看出 $\nabla_Y(B_X)$ 也属于 $\mathfrak{g}(x)$. 因此 $\nabla_Y(B_X) = 0$, 从而结束了引理的证明.

现在来证明 $B_X = 0$. 置 $Y = B_X X$. 由 Green 定理 (参看附录 6) 得到 (暂时假定 M 是可定向的)

$$\int_M \mathrm{div} Y dv = 0 \quad (dv\text{为体积元}).$$

因为在每一点 x, $\mathrm{div} Y$ 等于线性映射 $V \to \nabla_V Y$ 的迹, 所以 (由引理和命题 2.5) 有

$$\begin{aligned}\mathrm{div} Y &= \mathrm{tr}(V \to \nabla_V(B_X V)) = \mathrm{tr}(V \to B_X(\nabla_V X)) \\ &= -\mathrm{tr}(B_X A_X) = -\mathrm{tr}(B_X B_X) - \mathrm{tr}(B_X S_X) \\ &= -\mathrm{tr}(B_X B_X) \geqslant 0.\end{aligned}$$

因而

$$\int_M \operatorname{tr}(B_X B_X)dv = 0,$$

这蕴涵着 $\operatorname{tr}(B_X B_X) = 0$, 从而 $B_X = 0$. 若 M 是不可定向的, 则将 X 提升为 M 的二重可定向复盖空间 M^* 中的无穷小等距 X^*. 那么 $B_{X^*} = 0$ 蕴涵 $B_X = 0$. 证毕.

作为定理 4.5 的应用, 我们来证明 H. C. Wang(王宪钟)[1] 的一个结果.

定理 4.6 若 M 是紧 Riemann 流形. 那么

(1) M 上的每个平行张量场 K 在 M 的等距变换群的单位分支 $\mathfrak{I}^0(M)$ 作用下是不变的;

(2) 在每一点 x 处, $\mathfrak{I}^0(M)$ 的线性迷向群包含在线性和乐群 $\Psi(x)$ 中.

证明 (1) 令 X 是 M 的任意一个无穷小等距. 由命题 4.1 和定理 4.5, $T_x(M)$ 的单参数线性变换群 C_t 包含在 $\Psi(x)$ 中. 当把 C_t 扩张成 $T_x(M)$ 上的张量代数的单参数自同构群时, 它使 K 保持不变. 因而对于每个 $t, \varphi_t(K_x) = \tau_t^0 K_x$, 其中 φ_t 是由 X 生成的单参数等距变换群. 因为 $\mathfrak{I}^0(M)$ 是连通的, 所以它使 K 保持不变.

(2) 令 φ 是 $\mathfrak{I}^0(M)$ 的使得 $\varphi(x) = x$ 的任何元素. 因为 $\mathfrak{I}^0(M)$ 是一个紧连通 Lie 群, 所以存在一个单参数子群 φ_t 使得 $\varphi = \varphi_{t_0}$ 对于某个 t_0 成立. 在 (1) 的证明中已经看到, (从 φ_t 得到的)C_t 在 $\Psi(x)$ 中. 另一方面, 因为 $\varphi_{t_0}(x) = x$, 所以 τ_t^0 也在 $\Psi(x)$ 中. 从而 $\varphi_{t_0} = \tau_t^0 \circ C_t$ 属于 $\Psi(x)$. 证毕.

6.5 Ricci 张量和无穷小等距

令 M 是一个带有线性联络 Γ 的流形. Ricci 张量场 S 是如下定义的 2 阶协变张量场:

$$S(X,Y) = T_x(M)\text{中的映射}V \to R(V,X)Y\text{的迹},$$

其中 $X, Y, V \in T_x(M)$. 若 M 是一个 Riemann 流形并且 $V_1, \cdots, V_n$ 是 $T_x(M)$ 的规范正交基, 那么

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n} g(R(V_i, X)Y, V_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} R(V_i, Y, V_i, X), \quad X, Y \in T_x(M), \end{aligned}$$

其中, 上式中的 R 表示 Riemann 曲率张量 (参看第五章 5.2 节). Riemann 曲率张量的性质 (d)(参看第五章 5.1 节) 蕴涵着 $S(X,Y) = S(Y,X)$, 即 S 是对称的.

命题 5.1 若 X 是 Riemann 流形 M 的无穷小仿射变换, 那么对于 M 上的每一个向量场 Y 都有

$$\operatorname{div}(A_X Y) = -S(X, Y) - \operatorname{tr}(A_X A_Y).$$

特别地,

$$\operatorname{div}(A_X X) = -S(X, X) - \operatorname{tr}(A_X A_X).$$

证明 由命题 2.6, 对 M 上的任何向量场 V, 均有 $R(V, X) = -R(X, V) = -\nabla_V(A_X)$, 从而有

$$\begin{aligned} R(V, X)Y &= -(\nabla_V(A_X))Y = -\nabla_V(A_X Y) + A_X(\nabla_V Y) \\ &= -\nabla_V(A_X Y) - A_X A_Y V. \end{aligned}$$

于是本命题可从下列事实得出: $S(X, Y)$ 是 $V \to R(V, X)Y$ 的迹并且 $\operatorname{div}(A_X Y)$ 是 $V \to \nabla_V(A_X Y)$ 的迹. 证毕.

命题 5.2 对于Riemann 流形 M 的无穷小等距变换 X 来考虑 M 上的函数 $f = \frac{1}{2}g(X, X)$. 那么

(1) 对于每个切向量 $V, Vf = g(V, A_X X)$;

(2) 对于每个使得 $\nabla_V V = 0$ 的向量场 $V, V^2 f = g(V, \nabla_V(A_X X))$;

(3) 在任何使 f 达到相对极小的点, $\operatorname{div}(A_X X) \geqslant 0$;

在任何使 f 达到相对极大的点, $\operatorname{div}(A_X X) \leqslant 0$.

证明 因为 g 是平行的, 所以对 M 上的任意向量场 X, Y, Z 都有下式成立:

$$Z(g(X, Y)) = \nabla_Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

将此公式应用于 $X = Y$ 和 $Z = V$ 的情况, 根据命题 2.5 和 A_X 的斜对称性 (参看命题 3.2), 即得

$$Vf = g(\nabla_V X, X) = -g(A_X V, X) = g(V, A_X X),$$

这证明 (1) 成立. 若 V 是使得 $\nabla_V V = 0$ 的向量场, 那么

$$\begin{aligned} V^2 f = V(g(V, A_X X)) &= g(\nabla_V V, A_X X) + g(V, \nabla_V(A_X X)) \\ &= g(V, \nabla_V(A_X X)). \end{aligned}$$

这证明 (2) 成立. 为了证明 (3), 令 $V_1, \cdots, V_n$ 是 $T_x(M)$ 的规范正交基. 对于每个 i, 令 $\tau_i = x_i(t)$ 是满足初始条件 (x, V_i) 的测地线, 因而 $V_i = \dot{x}_i(0)$. 将每个 V_i 扩张成一个向量场使得对于小的 t 值, 它在 $x_i(t)$ 点与 $\dot{x}_i(t)$ 一致. 那么就有

$$d^2 f(x_i(t))/dt^2 = V_i^2 f = g(\nabla_{V_i} V_i, A_X X) + g(V_i, \nabla_{V_i}(A_X X))$$

$$= g(V_i, \nabla_{V_i}(A_X X)).$$

因为 $\mathrm{div}(A_X X)$ 是线性映射 $V \to \nabla_V(A_X X)$ 的迹, 所以

$$\mathrm{div}(A_X X)_x = \sum_{i=1}^{n} (V_i^2 f)_x.$$

于是 (3) 可从下列事实得出: 若 f 在 x 点达到相对极小值 (极大值), 那么 $(V_i^2 f)_x \geqslant 0 (\leqslant 0)$. 证毕.

作为这两个命题的应用, 我们来证明 Bochner[1] 的下列结果.

定理 5.3 令 M 是一个连通的 Riemann 流形并且它的 Ricci 张量场 S 在 M 上处处是负定的. 如果无穷小等距 X 的长度在 M 的某一点达到相对极大值, 那么 X 在 M 上恒为零.

证明 假定 X 的长度在 x 点达到相对极大值. 由命题 5.2, 在 x 点 $\mathrm{div}(A_X X) \leqslant 0$. 由命题 5.1 得 $-S(X,X) - \mathrm{tr}(A_X A_X) \leqslant 0$. 但由假设 $S(X,X) \leqslant 0$ 而且 $\mathrm{tr}(A_X A_X) \leqslant 0$, 因为 A_X 是斜对称的. 因而在 x 点 $S(X,X) = 0$ 且 $A_X = 0$. 因为 S 是负定的, 所以在 x 点 $X = 0$. 因为 X 的长度在 x 点达到相对极大值, 所以在 x 的一个邻域中 X 为零. 若 u 是 $O(M)$ 中使得 $\pi(u) = x$ 的任何点, 那么 X 的自然提升 $\widetilde{X}$ 在 u 点的一个邻域中为零. 正如我们在定理 3.3 的证明中所看到的那样, X 在 M 上恒为零. 证毕.

推论 5.4 若 M 是一个带有负定 Ricci 张量场的紧 Riemann 流形. 那么 M 的等距变换群 $\mathfrak{I}(M)$ 是有限的.

证明 由定理 5.3, $\mathfrak{I}^0(M)$ 退化为单位元. 因为 $\mathfrak{I}(M)$ 是紧的 (参看定理 3.4), 所以它是有限的. 证毕.

评注 推论 5.4 可按下列方法从命题 5.1 用 Green 定理导出.

可以假定 M 是可定向的; 否则, 只需考虑 M 的可定向二重覆盖空间. 从命题 5.1 和 Green 定理得到

$$\int_M [S(X,X) + \mathrm{tr}(A_X A_X)] dv = 0.$$

因为 $S(X,X) \leqslant 0$ 且 $\mathrm{tr}(A_X A_X) \leqslant 0$. 所以必然有 $S(X,X) = 0$ 和 $\mathrm{tr}(A_X A_X) = 0$ 在 M 上处处成立. 这个证明还给出下列推论.

推论 5.5 若 M 是一个紧 Riemann 流形并且其 Ricci 张量场为零, 那么 M 的每个无穷小等距都是平行向量场.

证明 由命题 2.5, 对 M 上的每个向量场 V 均有 $0 = A_X V = -\nabla_V X$. 证毕.

从推论 5.5, 可得到 Lichnerowicz[1] 的下列结果.

推论 5.6 若一连通齐次紧 Riemann 流形 M 的 Ricci 张量场为零, 那么 M 是一个 Euclid 环面.

证明　由第三章的定理 5.1 和本节的推论 5.5, 对任何无穷小等距 X, Y, 均有下式成立:

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = 0.$$

因而 $\mathfrak{I}^0(M)$ 是一个紧 Abel 群. 因为 $\mathfrak{I}^0(M)$ 有效作用在 M 上, 所以 $\mathfrak{I}^0(M)$ 在 M 的每一点处的迷向子群退化为单位元. 正如在第五章的例 4.1 中所看到的那样, M 是一个 Euclid 环面.　证毕.

作为命题 5.2 的另一个应用, 我们证明下列命题.

命题 5.7　令 φ_t 是由 Riemann 流形 M 的无穷小等距 X 生成的单参数等距变换群. 如果 x 是长度函数 $g(X,X)^{1/2}$ 的临界点, 那么轨道 $\varphi_t(x)$ 是一条测地线.

证明　若 x 是 $g(X,X)^{1/2}$ 的临界点, 那么它也是函数 $f = \dfrac{1}{2}g(X,X)$ 的临界点. 由命题 5.2 的 (1), 对于 x 点的每个向量 V 都有 $g(V, A_X X) = 0$. 从而在 x 点, $A_X X = 0$, 即在 x 点 $\nabla_X X = 0$. 因为由命题 1.2 的 (1), $\varphi_t(X_x) = X_{\varphi_t(x)}$, 所以沿着轨道 $\varphi_t(x)$ 有 $\nabla_X X = 0$. 这证明轨道 $\varphi_t(x)$ 为测地线.　证毕.

6.6　局部同构的扩张

令 M 是一个带有解析线性联络 Γ 的实解析流形. 线性标架丛 $L(M)$ 是一个解析流形而且联络形式 ω 是解析的. 对每一点 $u \in L(M)$ 指派一个水平子空间 Q_u 的分布 Q 按下列意义是解析的: 每一点 u 都有一个邻域和分布 Q 的一个由解析向量场组成的局部基. 同样的结论对于切丛 $T(M)$ 上的分布也成立, 而且它定义了切丛 $T(M)$ 中平行移动的概念 (关于伴随纤维丛中水平子空间的概念见第二章 2.7 节).

本节的主要目的是证明下列定理.

定理 6.1　令 M 是一个带有解析线性联络的连通且单连通的解析流形; 令 M' 是一个带完备解析线性联络的解析流形. 那么从 M 的一个连通开子集 U 到 M' 中的每一个仿射映射 f_U 都能唯一地扩张成从 M 到 M' 的仿射映射.

在证明本定理之前先证明几个引理.

引理 1　令 f 和 g 是从连通的解析流形 M 到解析流形 M' 的解析映射. 若 f 和 g 在 M 的一个非空开子集上一致, 则它们在整个 M 上一致.

引理 1 的证明　令 x 是 M 的任意一点, 并且令 $x^1, \cdots, x^n$ 是在 x 的一个邻域上解析的局部坐标系. 令 $y^1, \cdots, y^m$ 是在 $f(x)$ 点的一个邻域上解析的局部坐标系. 映射 f 可由一组解析函数表示:

$$y^i = f^i(x^1, \cdots, x^n), \quad i = 1, \cdots, m.$$

这些函数在 x 点能够展开成 $x^1, \cdots, x^n$ 的收敛幂级数. 类似地, 对映射 g 也有同样的结论. 令 N 是使得 $f(x) = g(x)$ 的点 $x \in M$ 的集合并且 f 和 g 在 x 点的幂级数展形式是一致的. 那么 N 显然是 M 的闭子集. 从熟知的幂级数的性质可知 N 在 M 中是开的. 因为 M 是连通的, 所以 $N = M$.

引理 2 令 S 和 S' 分别是解析流形 M 和 M' 上的解析分布. 令 f 是从 M 到 M' 的解析映射并且使得对 M 的一个开子集中的每一点 x,

$$(*) \qquad f(S_x) \subset S'_{f(x)}.$$

如果 M 是连通的, 那么 $(*)$ 式在 M 的每一点 x 都被满足.

引理 2 的证明 令 N 是使得 $(*)$ 式在 x 的邻域中被满足的所有点 $x \in M$ 的集合. 那么 N 显然是 M 的非空开集. 因为 M 是连通的, 所以只需再证明 N 是闭的就行了. 令 $x_k \in N$ 且 $x_k \to x_0$. 令 $y^1, \cdots, y^m$ 是在 $f(x_0)$ 的邻域 V 上解析的局部坐标系. 令 $Z_1, \cdots, Z_h$ 是 V 中的分布 S' 的局部基. 从 $\partial/\partial y^1, \cdots, \partial/\partial y^m$ 中选取 $m-h$ 个向量场, 记为 $Z_{h+1}, \cdots, Z_m$, 使得 $Z_1, \cdots, Z_h, Z_{h+1}, \cdots, Z_m$ 在 $f(x_0)$ 点是线性无关的, 从而在 $f(x_0)$ 点的一个邻域 V' 上是线性无关的. 令 U 是 x_0 的一个带有解析局部坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 的连通邻域使得 $f(U) \subset V'$ 并且 S 有一个由定义在 U 上的解析向量场组成的局部基 $X_1, \cdots, X_k$. 因为 f 是解的, 所以有

$$f(X_i)_x = \sum_{j=1}^{m} f_i^j(x) \cdot Z_j, \quad i = 1, \cdots, k.$$

其中 $f_i^j(x)$ 是 $x^1, \cdots, x^n$ 的解析函数. 因为 $x_k \in N$ 且 $x_k \to x_0$, 所以存在某个 x_k 的邻域 U_1 使得 $U_1 \subset U$ 而且 $(*)$ 式在 U_1 的每一点处均被满足. 换句话说, $f_i^j(x) = 0$ 在 U_1 上对 $1 \leqslant i \leqslant k$ 和 $h+1 \leqslant j \leqslant m$ 成立. 由此可知对同样的 i 和 j, $f_i^j(x) = 0$ 在 U 上成立. 这证明 $(*)$ 式在 U 的每一点 x 都被满足.

引理 3 令 M 和 M' 是带有解析线性联络的解析流形并且 f 是从 M 到 M' 的解析映射. 若 f 在 M 的一个开子集 U 上的限制是仿射映射且 M 是连通的, 那么 f 是从 M 到 M' 的仿射映射.

引理 3 的证明 令 F 是由 f 诱导的从切丛 $T(M)$ 到 $T(M')$ 的解析映射. 由假设, F 将 $\pi^{-1}(U)$ 的每一点处的水平子空间映射成 $T(M')$ 中的水平子空间 (这里 π 表示 $T(M)$ 到 M 上的射影). 将引理 2 应用于映射 F, 即可看出 f 是从 M 到 M' 的仿射映射.

引理 4 令 M 和 M' 是带线性联络的可微流形并且 f 和 g 是从 M 到 M' 的仿射映射. 若在某一点 $x \in M, f(X) = g(X)$ 对每一个 $X \in T_x(M)$ 成立. 那么 f 和 g 在 M 上一致.

引理 4 的证明 令 N 是使得 $f(X)=g(X)$ 对于 $X\in T_x(M)$ 成立的所有点 $x\in M$ 的集合. 那么 N 显然是 M 的非空闭子集. 因为 f 和 g 均与指数映射交换 (命题 1.1), 所以 $x\in N$ 蕴涵着 x 的法坐标邻域在 N 中, 因而 N 是开的. 由于 M 是连通的, 所以就有 $N=M$.

现在我们已经有条件来完成定理 6.1 的证明. 在定理 6.1 的假设条件下, 令 $x(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 是 M 中使得 $x(0)\in U$ 的一条曲线. 由定义, f_U 沿曲线 $x(t)$ 的解析延拓是满足下列条件的一族仿射映射 $f_t(0\leqslant t\leqslant 1)$:

(1) 对于每一个 t, f_t 都是从 $x(t)$ 点的一个邻域 U_t 到 M' 中的一个仿射映射;

(2) 对于每个 t, 存在一个正数 δ 使得若 $|s-t|<\delta$ 则 $x(s)\in U_t$ 并且在 $x(s)$ 的一个邻域中 f_s 与 f_t 一致;

(3) $f_0=f_U$.

从引理 4 易知, f_U 沿曲线 $x(t)$ 的解析延拓如果存在则必是唯一的. 我们证明它确实存在. 令 t_0 是使得解析延拓对于 $0\leqslant t\leqslant t_1$ 存在的 $t_1>0$ 的上确界. 像在第三章定理 8.7 中那样, 令 W 是 $x(t_0)$ 的一个凸邻域使得 W 的每一点都有一个包含 W 的法坐标邻域. 因为对于 $0\leqslant t\leqslant t_1$, f_U 的解析延拓 f_t 存在, 所以有从 $x(t_1)$ 的邻域到 M' 中的仿射映射 f_{t_1}. 我们将 f_{t_1} 如下扩张成从 V 到 M' 的解析映射, 记为 g. 因为指数映射给出从 $T_{x(t_1)}(M)$ 中原点的一个邻域 V^* 到 V 上的一个微分同胚. 所以每一点 $y\in V$ 决定唯一的一个元素 $X\in V^*\subset T_{x(t_1)}(M)$ 使得 $y=\exp X$. 置 $X'=f_{t_1}(X)$, 因而 X' 是 $f_{t_1}(x(t_1))$ 点的向量. 因为 M' 是完备的, 所以 $\exp X'$ 是完全确定的并且置 $g(y)=\exp X'$. 这样定义的 f_{t_1} 的扩张 g 与指数映射交换. 因为指数映射是解析的, 所以 g 也是解析的. 由引理 3, g 是从 V 到 M' 的仿射映射. 利用这个仿射映射 g, 则容易定义超出 t_1 的延拓 f_t. 这样就证明了沿整个曲线 $x(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的解析延拓 f_t 的存在性.

为了完成定理 6.1 的证明, 令 x 是 U 中的任一固定点. 对于 M 的每一点 y, 令 $x(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 是从 x 到 y 的一条曲线. 仿射映射 f_U 能够沿曲线 $x(t)$ 被解析延拓并且产生一个从 y 的邻域到 M' 的仿射映射 g. 现在证明 $g(y)$ 不依赖于从 x 到 y 的曲线的选取. 为此只需注意到, 如果 $x(t)$ 是一条闭曲线, 那么 f_U 沿 $x(t)$ 的解析延拓 f_t 产生一个仿射映射 f_1, 它与 f_U 在 x 的一个邻域上一致. 因为 M 是单连通的, 所以曲线 $x(t)$ 同伦于零, 于是我们的结论容易从因子分解引理 (参看附录 7) 和我们已证明的解析延拓的唯一性得出. 由此可知, 给定的映射 f_U 可以扩张成从 M 到 M' 的仿射映射 f. f 的唯一性从引理 4 得出. 证毕.

推论 6.2 令 M 和 M' 都是带有完备解析线性联络的连通且单连通的解析流形. 那么 M 和 M' 的连通开子集之间的每一个仿射同构都能唯一地扩张成 M 和 M' 之间的仿射同构.

对于解析 Riemann 流形也有相应的结果. 解析 Riemann 度量的 Riemann 联络

是解析的, 这一点可从第四章的推论 2.4 得出.

定理 6.3　令 M 和 M' 是维数相同的解析 Riemann 流形. 如果 M 是连通和单连通的而且 M' 是完备的. 那么从 M 的连通开子集 U 到 M' 中的每一个等距浸入 f_U 都能唯一地扩张成从 M 到 M' 中的等距浸入.

证明　本定理的证明完全类似于定理 6.1 的证明. 我们仅仅指出必要的改动. 引理 1 可以毫无改变的使用. 引理 2 仅仅对于导出引理 3 是必要的. 在目前的情况下, 我们直接证明下列引理 3′.　证毕.

引理 3′　令 M 和 M' 分别是带有解析 Riemann 度量 g 和 g' 的解析流形并且令 f 是从 M 到 M' 的解析映射. 如果 f 在 M 的开子集 U 上的限制是一个等距浸入而且 M 是连通的, 那么 f 是从 M 到 M' 中的等距浸入.

引理 3′ 的证明　比较 g 和 $f^*(g')$. 因为它们在 U 上一致, 所以由类似于在引理 1 的证明中所使用的论证方法可以证明它们在整个 M 上一致.

在引理 4 中, 将"仿射映射"用"等距浸入"代替, 因为等距浸入将测地线仍然映射成测地线, 从而它与指数映射可交换, 所以引理 4 的证明仍然有效.

在定理 6.1 证明的其他地方, 均以"等距浸入"代替"仿射映射", 则证明无需作任何其他改变即可进行到底.　证毕.

推论 6.4　令 M 和 M' 是连通和单连通的完备解析 Riemann 流形. 那么 M 和 M' 的连通开子集之间的每一个等距映射均可唯一地扩张成 M 和 M' 之间的等距映射.

6.7　等 价 问 题

令 M 是一个带线性联络的流形. 令 $x^1, \cdots, x^n$ 是 x_0 点的法坐标系, 并且令 U 是由 $|x^i| < \delta (i = 1, \cdots, n)$ 给出的 x_0 点的邻域. 令 u_0 是由 $(\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^n)$ 给出的以 x_0 为原点的线性标架. 定义一个截面 $\sigma : U \to L(M)$ 如下. 若 x 是 U 中坐标为 $(a^1, \cdots, a^n)$ 的点, 那么 $\sigma(x)$ 是通过将 u_0 沿着由 $x^i = ta^i (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 给出的测地线平移而得到的标架. 我们将 σ 称为适应于法坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 的截面.

本节的首要目标是证明下列定理.

定理 7.1　令 M 和 M' 是带有线性联络的流形. 令 U(相应地 V) 是 $x_0 \in M (y_0 \in M')$ 点的一个带法坐标系 $x^1, \cdots, x^n (y^1, \cdots, y^n)$ 的法坐标邻域. 令 $\sigma : U \to L(M) (\sigma' : V \to L(M'))$ 是适应于 $x^1, \cdots, x^n (y^1, \cdots, y^n)$ 的截面, 若从 U 到 V 上的微分同胚 f 满足下列两个条件, 则它是一个仿射同构:

(1) 对于每一点 $x \in U$, f 将标架 $\sigma(x)$ 映射成标架 $\sigma'(f(x))$;

(2) f 保持挠率张量场和曲率张量场不变.

证明　令 $\theta = (\theta^i)$ 和 $\omega = (\omega^i_j)$ 分别是 $L(M)$ 上的标准形式和联络形式. 置

(1) $\bar{\theta}^i = \sigma^*\theta^i = \sum\limits_j A^i_j \mathrm{d}x^j, \quad i=1,\cdots,n,$

(2) $\bar{\omega}^i_j = \sigma^*\omega^i_j = \sum\limits_k B^i_{jk}\mathrm{d}x^k, \quad i,j=1,\cdots,n.$ 证毕.

引理 1 对于任何满足 $|a^i|<\delta$ 的 $(a^1,\cdots,a^n)\neq(0,\cdots,0)$ 均有

(3) $\sum\limits_j A^i_j(ta)a^j = a^i, \quad 0\leqslant t\leqslant 1, \quad i=1,\cdots,n,$

(4) $\sum\limits_k B^i_{jk}(ta)a^k = 0, \quad 0\leqslant t\leqslant 1, \quad i,j=1,\cdots,n.$

其中 ta 代表 $(ta^1,\cdots,ta^n)$.

引理 1 的证明 对于一个固定的 $a=(a^i)$, 考虑由 $x^i=ta^i(0\leqslant t\leqslant 1, i=1,\cdots,n)$ 给出的测地线 x_t. 令 $u_t=\sigma(x_t)$, 它是 x_t 的从 u_0 出发的水平提升. 因为各标架 u_t 沿 x_t 是平行的, 所以有

$$\bar{\theta}^i(\dot{x}_t) = \theta^i(\dot{u}_t) = a^i.$$

另一方面, 又有

$$\dot{x}_t = \sum_j a^j(\partial/\partial x^j) \quad 和 \quad \bar{\theta}^i(\dot{x}_t) = \sum_j A^i_j(ta)a^j.$$

这证明 (3) 式成立. 类似地, (4) 式从 $\omega(\dot{u}_t)=0$ 的事实得出.

置 (参看第三章 3.7 节)

(5) $\bar{\Theta}^i = \sigma^*\Theta = \sum\limits_{j,k}\dfrac{1}{2}\bar{T}^i_{jk}\bar{\theta}^j\wedge\bar{\theta}^k(\bar{T}^i_{jk}=\sigma^*\widetilde{T}^i_{jk}),$

(6) $\bar{\Omega}^i_j = \sigma^*\Omega^i_j = \sum\limits_{k,l}\dfrac{1}{2}\bar{R}^i_{jkl}\bar{\theta}^k\wedge\bar{\theta}^l(\bar{R}^i_{jkl}=\sigma^*\widetilde{R}^i_{jkl}).$

引理 2 对任意固定的 $(a^1,\cdots,a^n)$, 置

$$\hat{A}^i_j(t) = tA^i_j(ta), \quad \hat{B}^i_{jk}(t) = tB^i_{jk}(ta),$$

$$\hat{T}^i_{jk}(t) = \bar{T}^i_{jk}(ta), \quad \hat{R}^i_{jkl}(t) = \bar{R}^i_{jkl}(ta).$$

那么函数 $\hat{A}^i_j(t)$ 和 $\hat{B}^i_{jk}(t)$ 满足下列线性常微分方程组:

(7) $d\hat{A}^i_j(t)/dt = \delta^i_j + \sum\limits_l \hat{B}^i_{lj}(t)a^l + \sum\limits_{l,m}\hat{T}^i_{lm}(t)\hat{A}^m_j(t)a^l,$

(8) $d\hat{B}^i_{jk}(t)/dt = \sum\limits_{l,m}\hat{R}^i_{jkm}(t)\hat{A}^m_k(t)a^l.$

并且满足初始条件:

(9) $\hat{A}^i_j(0)=0, \quad \hat{B}^i_{jk}(0)=0.$

引理 2 的证明 考虑 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中由 $Q=\{(t,a^1,\cdots,a^n);|ta^i|<\delta,i=1,\cdots,n\}$ 定义的开集 Q. 令 ρ 是由下式定义的从 Q 到 U 的映射:

$$\rho(t,a^1,\cdots,a^n)=(ta^1,\cdots,ta^n).$$

再置

$$\bar{\bar{\theta}}^i=\rho*\bar{\theta}^i,\quad \bar{\bar{\omega}}^i_j=\rho*\bar{\omega}^i_j,\quad \bar{\bar{\Theta}}^i=\rho*\bar{\Theta}^i,\quad \bar{\bar{\Omega}}^i_j=\rho*\bar{\Omega}^i_j.$$

从引理 1 得到

(10) $$\bar{\bar{\theta}}^i=\sum_j tA^i_j(ta)\mathrm{d}a^j+a^i\mathrm{d}t,$$

(11) $$\bar{\bar{\omega}}^i_j=\sum_k tB^i_{jk}(ta)\mathrm{d}a^k.$$

从 (5) 式和 (6) 式得到

(12) $$\bar{\bar{\Theta}}^i=\sum_{j,k}\frac{1}{2}\bar{T}^i_{jk}(ta)\,\bar{\bar{\theta}}^i\wedge\bar{\bar{\theta}}^k,$$

(13) $$\bar{\bar{\Omega}}^i_j=\sum_{k,l}\frac{1}{2}\bar{R}^i_{jkl}(ta)\,\bar{\bar{\theta}}^k\wedge\bar{\bar{\theta}}^l.$$

从 (10) 式和 (11) 式得到

(14) $$\mathrm{d}\,\bar{\bar{\theta}}^i=-\sum_j\left[\frac{\partial}{\partial t}(tA^i_j(ta))+\delta^i_j\right]\mathrm{d}a^j\wedge\mathrm{d}t+\cdots,$$

(15) $$\mathrm{d}\bar{\bar{\omega}}^i_j=-\sum_k\left[\frac{\partial}{\partial t}(tB^i_{jk}(ta))\right]\mathrm{d}a^k\wedge\mathrm{d}t+\cdots,$$

其中省略号表示那些不包含 $\mathrm{d}t$ 的项.

从 (10), (11), (12), (13) 诸式得到

(16) $$-\sum_j\bar{\bar{\omega}}^i_j\wedge\bar{\bar{\theta}}^j+\bar{\bar{\Theta}}^i$$

$$=-\sum_j\left[\sum_l tB^i_{lj}(ta)a^l+\sum_l\bar{T}^i_{lm}(ta)(tA^m_j(ta))a^l\right]\mathrm{d}a^j\wedge\mathrm{d}t+\cdots,$$

(17) $$-\sum_k\bar{\bar{\omega}}^i_k\wedge\bar{\bar{\omega}}^k_j+\bar{\bar{\Omega}}^i_j$$

$$=-\sum_k\left[\sum_{l,m}\bar{R}^i_{jlm}(ta)(tA^m_k(ta))a^l\right]\mathrm{d}a^k\wedge dt+\cdots,$$

其中省略号表示不包含 dt 的那些项. 于是 (7) 从 (14)、(16) 及第一结构方程得出. 类似地, (8) 从 (15)、(17) 及第二结构方程得出.
最后, 从 $\hat{A}^i_j(t)$ 和 $\hat{B}^i_{jk}(t)$ 的定义, (9) 式是显然的. 这就证明了引理 2.

从引理 2 和线性常微分方程组解的唯一性定理 (参看附录 1) 可知, 函数 $\hat{A}^i_j(t)$ 和 $\hat{B}^i_{jk}(t)$ 是由 $\hat{T}^i_{jk}(t)$ 和 $\hat{R}^i_{jkl}(t)$ 唯一决定的. 另一方面, 函数 $\hat{T}^i_{jk}(t)$ 和 $\hat{R}^i_{jkl}(t)$ 是由挠率张量场 T 和曲率张量场 R 唯一决定的并且 (对于每个固定的 $(a^1,\cdots,a^n)$) 还是由截面唯一决定的. 从 (1) 可以看出联络形式 ω 是由 T,R 和 σ 唯一决定的. 证毕.

在实解析线性联络的情况下, 挠率张量场和曲率张量场以及它们在一点的各阶协变导数唯一地决定这个联络. 更确切地说是有下列定理成立.

定理 7.2 令 M 和 M' 是带有解析线性联络的解析流形. 令 T,R,∇(相应地, T',R',∇') 分别是 $M(M')$ 的挠率, 曲率和协变微分. 如果线性同构 $F: T_{x_0}(M)\to T_{y_0}(M')$ 把张量 $(\nabla^m T)_{x_0}$ 和 $(\nabla^m R)_{x_0}$ 分别映射成张量 $(\nabla'^m T')_{y_0}$ 和 $(\nabla'^m R')_{y_0}(m=0,1,2,\cdots)$, 则有一个从 x_0 的邻域 U 到 y_0 的邻域 V 的仿射同构 f 使得 $f(x_0)=y_0$ 而且 f 在 x_0 点的微分就是 F.

证明 令 $x^1,\cdots,x^n(|x^i|<\delta)$ 是 x_0 的邻域 U 上的法坐标系, 令 $y^1,\cdots,y^n(|y^i|<\delta)$ 是 y_0 的邻域 V 上的法坐标系且使得 $(\partial/\partial y^i)_{y_0}=F((\partial/\partial x^i)_{x_0}), i=1,\cdots,n$; 这种坐标系存在并且是唯一的. 令 f 是由下式定义的从 U 到 V 上的解析同胚:

$$y^i\circ f=x^i,\quad i=1,\cdots,n.$$

显然 f 在 x_0 点的微分与 F 一致. 我们将证明 f 是从 U 到 V 上的仿射同构. 证毕.

仍然沿用定理 7.1 的证明中的记号. 那么只需证明下列五个论断即可. 若将法坐标系 $x^1,\cdots,x^n$ 固定, 则有

(i) 张量 $(\nabla^m T)_{x_0}(m=0,1,2,\cdots)$ 决定函数 $\hat{T}^i_{jk}(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$;

(ii) 张量 $(\nabla^m R)_{x_0}(m=0,1,2,\cdots)$ 决定函数 $\hat{R}^i_{jkl}(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$;

(iii) 函数 $\hat{T}^i_{jk}(t)$ 和 $\hat{R}^i_{jkl}(t)$ 决定形式 $\bar{\theta}^i$ 和 $\bar{\omega}^i_j$;

(iv) 形式 $\bar{\theta}^i$ 决定截面 σ;

(v) 截面 σ 和形式 $\bar{\omega}^i_j$ 决定联络形式 ω.

为了证明 (i) 和 (ii), 则需要下列引理.

引理 1 令 $u_t(0\leqslant t\leqslant 1)$ 是曲线 $x_t(0\leqslant t\leqslant 1)$ 到 $L(M)$ 中的水平提升. 令 $\mathbf{T}^r_s$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 (r,s) 型张量空间. 给定沿 x_t 的一个 (r,s) 型张量场 K, 令 $\widetilde{K}$ 是由

$$K(\widetilde{u}_t)=u_t^{-1}(K_{x_t}),\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

沿着 u_t 定义的 $\mathbf{T}_s^r$ 值函数, 其中 u_t 被看作从 $\mathbf{T}_s^r$ 到 x_t 点的 (r,s) 型张量空间 $\mathbf{T}_s^r(x_t)$ 上的线性映射, 则有

$$\mathrm{d}\widetilde{K}(u_t)/\mathrm{d}t = u_t^{-1}(\nabla_{\dot{x}_t}K), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

引理 1 的证明 这是第三章命题 1.3 的特殊情况. 这里的张量场 K 和函数 $\widetilde{K}$ 对应于那里的截面 φ 和函数 f. 虽然第三章命题 1.3 中的 φ 是在整个 M 上有定义, 但是当 φ 是在 M 中的一条曲线上有定义时, 证明仍然有效 (参看第三章命题 1.1 的引理).

为证明 (i), 将引理 1 应用于挠率 T 和由 $x^i = ta^i (i = 1, \cdots, n)$ 给出的测地线 x_t 以及 x_t 的满足 $u_0 = ((\partial/\partial x^1)_{x_0}, \cdots, (\partial/\partial x^n)_{x_0})$ 的水平提升 u_t. 那么引理 1(应用 m 次) 蕴涵着对于每一个 $t, u_t^{-1}((\nabla_{\dot{x}_1})^m T)$ 是张量空间 $\mathbf{T}_2^1$ 中以 $d^m\hat{T}_{jk}^i(t)/dt^m$ 为分量的元素. 特别当置 $t=0$ 时可以看出, 一旦坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 和 $(a^1, \cdots, a^n)$ 被选定, 那么 $(\mathrm{d}^m\hat{T}_{jk}^i/\mathrm{d}t^m)_{t=0} (m = 0, 1, 2, \cdots)$ 都是由 $(\nabla^m T)_{x_0}$ 决定的. (实际上, 不难看出

$$(\mathrm{d}^m\hat{T}_{jk}^i/\mathrm{d}t^m)_{t=0} = \sum_{l_1,\cdots,l_m} T_{jk;l_1;\cdots;l_m}^i(x_0)a^{l_1}\cdots a^{l_m},$$

其中 $T_{jk;l_1;\cdots;l_m}^i$ 是 $\nabla^m T$ 关于 $x^1, \cdots, x^n$ 的分量.) 因为每个 $\hat{T}_{jk}^i(t)$ 均为 t 的解析函数, 所以它是由 $(\nabla^m T)_{x_0} (m = 0, 1, 2, \cdots)$ 决定的.
这证明 (i) 成立. (ii) 的证明是类似的.

定理 7.1 的引理 2 蕴涵着函数 $\hat{T}_{jk}^i(t)$ 和 $\hat{R}_{jkl}^i(t)$ 决定函数 $\hat{A}_j^i(t)$ 和 $\hat{B}_{jk}^i(t)$. 于是 (iii) 可以从定理 7.1 证明中的 (1) 式和 (2) 式得出.

(iv) 从下列引理得出.

引理 2 令 σ 和 σ' 是 $L(M)$ 在 M 的开子集 U 上的两个截面. 如果在 U 上, $\sigma^*\theta = \sigma'^*\theta$, 那么 $\sigma = \sigma'$.

引理 2 的证明 对于每个 $X \in T_x(M)$, 其中 $x \in U$, 都有

$$(\sigma^*\theta)(X) = \theta(\sigma x) = \sigma(x)^{-1}(\pi(\sigma X)) = \sigma(x)^{-1}X,$$

其中 $\sigma(x) \in L(M)$ 被看作从 $\mathbf{R}^n$ 到 $T_x(M)$ 的线性同构. 利用对于 σ' 的同样的等式, 则得到

$$\sigma(x)^{-1}X = \sigma'(x)^{-1}X.$$

因为这对于 $T_x(M)$ 中的每一个 X 都成立, 所以 $\sigma(x) = \sigma'(x)$.

最后, 从 $\bar{\omega}_j^i$ 的定义, (V) 是明显的. 证毕.

推论 7.3 在定理 7.2 中若 M 和 M' 还是连通和单连通的解析流形并且带有完备的解析线性联络, 则存在从 M 到 M' 的唯一仿射同构 f, 它在 x_0 的微分与 F 一致.

证明 这是推论 6.2 和定理 7.2 的直接结论. 证毕.

定理 7.4 令 M 和 M' 是带线性联络的可微流形. 令 T, R, ∇(相应地 T', R', ∇') 是 $M(M')$ 的挠率, 曲率和协变微分. 假设 $\nabla T = 0, \nabla R = 0, \nabla' T' = 0, \nabla' R' = 0$. 如果 F 是从 $T_{x_0}(M)$ 到 $T_{y_0}(M')$ 的线性同构并且把 x_0 点的张量 T_{x_0} 和 R_{x_0} 分别映射成 y_0 点的张量 T'_{y_0} 和 R'_{y_0}, 那么就有从 x_0 的邻域 U 到 y_0 的邻域 V 上的仿射同构 f 使得 $f(x_0) = y_0$ 而且 f 在 x_0 点的微分与 F 一致.

证明 仍然沿用定理 7.2 的证明中的记号和论证方法. 由定理 7.2 证明中的引理 1, 函数 $\hat{T}^i_{jk}(t)$ 和 $\hat{R}^i_{jkl}(t)$ 均为常函数, 从而是由 T_{x_0} 和 R_{x_0}(以及坐标系 $x^1, \cdots, x^n$) 所决定的. 于是本定理可从定理 7.2 证明中的 (iii), (iv), (v) 得出. 证毕.

推论 7.5 令 M 是一个带线性联络的可微流形并且使得 $\nabla T = 0$ 和 $\nabla R = 0$. 那么对于 M 的任何两个点 x 和 y, 都存在从 x 的邻域到 y 的邻域上的仿射同构.

证明 令 τ 是从 x 到 y 的一条任意曲线. 因为 $\nabla T = 0$ 和 $\nabla R = 0$, 所以平移 $\tau : T_x(M) \to T_y(M)$ 将 x 点的张量 T_x 和 R_x 映射成 y 点的张量 T_y 和 R_y. 由定理 7.4, 存在一个局部仿射同构 f 使得 $f(x) = y$ 而且 f 在 x 点的微分与 τ 一致. 证毕.

令 M 是一个带有线性联络 Γ 的流形. 如果对 M 的任意两点 x 和 y 以及对于从 x 到 y 的任意曲线 τ, 都存在一个 (唯一的) 局部仿射同构 f 使得 $f(x) = y$ 而且 f 在 x 点的微分与平移 $\tau : T_x(M) \to T_y(M)$ 一致, 则称联络 Γ 是经平移不变的. 在推论 7.5 的证明中已经看到, 若 $\nabla T = 0$ 且 $\nabla R = 0$, 则联络是经平移不变的. 实际上, 其逆也成立, 即有下列推论.

推论 7.6 线性联络是经平行移动不变的, 当且仅当 $\nabla T = 0$ 且 $\nabla R = 0$.

证明 假设联络是经平移不变的. 令 τ 是从 x 到 y 的任意一条曲线. 令 f 是一个局部仿射同构使得 $f(x) = y$ 并且 f 在 x 点的微分与平移 τ 一致. 那么 f 将 T_x 和 R_x 分别映射为 T_y 和 R_y. 从而平移 τ 把 T_x 和 R_x 分别映射成 T_y 和 R_y. 这意味着 T 和 R 是平行张量场. 证毕.

定理 7.7 令 M 是一个带线性联络的可微流形并且使得 $\nabla T = 0$ 和 $\nabla R = 0$. M 关于由法坐系组成的坐标卡集是一个解析流形并且其联络是解析的.

证明 令 $x^1, \cdots, x^n$ 是开集 U 中的一个法坐标系. 像在第三章 3.7 节中那样在 $\pi^{-1}(U) \subset L(M)$ 中自然引进一个坐标系 $(x^i, X^j_k)_{i,j,k=1,\cdots,n}$(参看第一章例 5.2). 若用 (U^j_k) 表示 (X^j_k) 的逆矩阵, 那么标准形式和联络形式可以表示如下 (参看第三章的命题 7.1 和 7.2): 证毕.

$$(18)\ \theta^i = \sum_j U^j_j \mathrm{d}x^i, \quad i = 1, \cdots, n;$$

$$(19)\ \omega^i_j = \sum_k U^i_k \left(\mathrm{d}X^k_j + \sum_{l,m} \Gamma^k_{lm} X^l_j \mathrm{d}x^m \right), \quad i, j = 1, \cdots, n.$$

形式 θ^i 关于 (x^i, x_k^j) 是解析的. 现在证明形式 ω_j^i 关于 (x^i, X_k^j) 也是解析的. 显然只需证明联络的分量 Γ_{jk}^i 对于 $x^1, \cdots, x^n$ 是解析的即可. 仍然沿用定理 7.1 证明中的记号. 因为函数 $\hat{T}_{jk}^i(t)$ 和 $\hat{R}_{jkl}^i(t)$ 是常数, 根据 $\nabla T = 0$ 和 $\nabla R = 0$ 的假设, 这些函数不依赖于 $(a^1, \cdots, a^n)$, 所以定理 7.1 证明中的引理 2 蕴涵着 (参看附录 1) 函数 $\hat{A}_j^i(t)$ 和 $\hat{B}_{jkl}^i(t)$ 都是关于 t 的解析函数并且解析地依赖于 $(a^1, \cdots, a^n)$. 从而 $\hat{A}_j^i$ 和 $\hat{B}_{jk}^i$ 都是关于 $x^1, \cdots, x^n$ 的解析函数. 从定理 7.1 证明中的 (1) 可知截面 $\sigma : U \to L(M)$ 由下式给出:

(20) $U_j^i = A_j^i, \quad i, j = 1, \cdots, n.$

令 (C_j^i) 是 (A_j^i) 的逆矩阵. 从 (19) 式和 (20) 式得

$$(21)\ \sigma^*\omega_j^i = \bar{\omega}_j^i = \sum_k A_k^i \Big(dC_j^k + \sum_{l,m} \Gamma_{ml}^k C_j^l dx^m\Big).$$

通过将 (21) 式与定理 7.1 证明中的 (2) 式比较则得到

$$(22)\ B_{jm}^i = \sum_k A_k^i \Big(\partial C_j^k / \partial x^m + \sum_l \Gamma_{ml}^k C_j^l\Big).$$

将 (22) 式变形则得

$$(23)\ \Gamma_{ml}^k = \sum_j \left(\sum_i C_i^k B_{jm}^i - \partial C_j^k / \partial x^m\right) A_l^j,$$

这说明各分量 Γ_{jk}^i 是 $x^1, \cdots, x^n$ 的解析函数.

因为 $n^2 + n$ 个 1 形式 θ^i 和 ω_k^j 都是关于 (x^i, X_k^j) 解析的并且定义一个绝对平行 (第三章命题 2.5), 所以下列定理蕴涵着关于从 M 的法坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$ 诱导的坐标系 (x^i, X_j^i) 组成的卡集, $L(M)$ 是一个解析流形.

引理　令 $\omega^1, \cdots, \omega^m$ 是在 m 维流形 P 上定义绝对平行的 1 形式. 令 $u^1, \cdots, u^m$ 和 $v^1, \cdots, v^m$ 分别是在开集 U 和 V 上有效的局部坐标系. 若形式 $\omega^1, \cdots, \omega^m$ 关于 $u^1, \cdots, u^m$ 和 $v^1, \cdots, v^m$ 都是解析的, 那么定义坐标变换的函数

$$v^i = f^i(u^1, \cdots, u^m), \quad i = 1, \cdots, m$$

是解析的.

引理的证明　将各 1 形式 ω^i 写成

$$\omega^i = \sum_j a_j^i(u) du^j = \sum_j b_j^i(v) dv^j$$

其中各函数 $a_j^i(u)$ 和 $b_j^i(v)$ 分别关于 $u^1, \cdots, u^m$ 和 $v^1, \cdots, v^m$ 是解析的. 令 $(c_j^i(v))$ 是 $(b_j^i(v))$ 的逆矩阵. 那么函数组 $v^i = f^i(u^1, \cdots, u^m) (i = 1, \cdots, m)$ 是下列线性偏

微分方程组的解:

$$\partial v^i/\partial u^j = \sum_k c_k^i(v) a_i^k(u), \quad i, j = 1, \cdots, n.$$

因为函数 $c_k^i(v)$ 和 $a_i^k(u)$ 分别关于 $v^1, \cdots, v^m$ 和 $u^1, \cdots, u^m$ 是解析的, 所以各函数 $f^i(u^1, \cdots, u^m)$ 关于 $u^1, \cdots, u^m$ 是解析的 (参看附录 1). 这证明引理成立.

令 $x^1, \cdots, x^n$ 和 $y^1, \cdots, y^n$ 是 M 中的两个法坐标系. 令 (x^i, X_k^j) 和 (y^i, Y_k^j) 分别是由这两个法坐标系诱导的 $L(M)$ 中的局部坐标系. 由刚才证明的引理, $y^1, \cdots, y^n$ 是 x^i 和 X_k^j 的解析函数. 因为 $y^1, \cdots, y^n$ 显然不依赖于 X_k^j, 所以它们是 $x^1, \cdots, x^n$ 的解析函数. 这就证明了定理 7.7 的第一个论断. 因为我们已经证明了各形式 ω_j^i 关于 (x^i, X_k^j) 是解析的, 所以联络是解析的. 证毕.

作为定理 7.7 的应用又可得出下列定理.

定理 7.8 在定理 7.4 中, 若 M 和 M' 还是连通、单连通且完备的, 那么存在从 M 到 M' 的唯一仿射同构 f 使得 $f(x_0) = y_0$ 并且 f 在 x_0 点的微分与 F 一致。

证明 这是推论 6.2、定理 7.4 和定理 7.7 的直接结论. 证毕.

推论 7.9 令 M 是一个带完备线性联络的连通且单连通的流形并且使得 $\nabla T = 0$ 和 $\nabla R = 0$. 若 F 是从 $T_{x_0}(M)$ 到 $T_{y_0}(M)$ 的线性同构并且把张量 T_{x_0} 和 R_{x_0} 分别映射成 T_{y_0} 和 R_{y_0}, 则 M 有唯一的仿射变换 f 使得 $f(x_0) = y_0$ 而且 f 在 x_0 点的微分就是 F.

特别, M 的仿射变换群 $\mathfrak{A}(M)$ 在 M 上是可迁的.

证明 第一个论断是显然的. 第二个论断从推论 7.5 和定理 7.8 得出. 证毕.

在第五章 5.3 节中, 我们曾对每个实数 k 构造了一个具有常曲率 k 的连通且单连通的完备 Riemann 流形. 任何具有常曲率 k 的连通且单连通的完备空间均等距同构于我们所构造的模型, 即有下列定理.

定理 7.10 任何两个具有常曲率 k 的连通且单连通的完备 Riemann 流形都是互相等距同构的.

证明 由第五章的推论 2.3, 对于每个常曲率空间均有 $\nabla T = 0$. 于是定理的结论可从定理 7.8 和下列事实得出: 若 M 和 M' 具有相同的截曲率 k, 那么把 x_0 点的度量张量 g_{x_0} 映射 y_0 点的度量张量 g'_{y_0} 的任何线性同构 $F: T_{x_0}(M) \to T_{y_0}(M')$ 必定把 x_0 点的曲率张量 R_{x_0} 映射成 y_0 点的曲率张量 R'_{y_0}(参看第五章的命题 1.2). 证毕.

附录 1　线性常微分方程

本附录的目的是按照本书所需要的形式来叙述线性常微分方程基本定理, 其证明可在关于微分方程的各种教科书中找到.

为了简单起见我们将使用下列缩写记号：

$$y=(y^1,\cdots,y^n),\quad \eta=(\eta^1,\cdots,\eta^n),\quad f=(f^1,\cdots,f^n),$$

$$\varphi=(\varphi^1,\cdots,\varphi^n),\quad s=(s^1,\cdots,s^m),\quad x=(x^1,\cdots,x^m).$$

于是就有

定理　令 $f(t,y,s)$ 是在 $|t|<\delta$ 和 $(y,s)\in D$ 中定义的 n 个函数构成的函数族, 其中 D 是 $\boldsymbol{R}^{n+m}$ 中的开集. 如果 $f(t,y,s)$ 对 t 是连续的而且对于 y 是 C^1 可微的. 那么存在在 $|t|<\delta'$, $(\eta,s)\in D'$ 中定义的 n 个函数组成的唯一函数族 $\varphi(t,\eta,s)$ (其中, $0<\delta'<\delta, D'$ 是 D 的开子集) 使得

(1) $\varphi(t,\eta,s)$ 关于 t 和 η 是 C^1 可微的;

(2) $\partial\varphi(t,\eta,s)/\partial t=f(t,\varphi(t,\eta,s),s)$;

(3) $\varphi(0,\eta,s)=\eta$.

如果 $f(t,y,s)$ 对于 t 是 C^p $(0\leqslant p\leqslant\omega)$ 可微的并且关于 y 和 s 是 $C^q(1\leqslant q\leqslant\omega)$ 可微的. 那么 $\varphi(t,\eta,s)$ 对于 t 是 C^{p+1} 可微的而关于 η 和 s 是 C^q 可微的.

考虑依赖于参数 s 的微分方程组：

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=f(t,y,s).$$

那么 $y=\varphi(t,\eta,s)$ 称为方程组的满足初始条件

$$y|_{t=0}=\eta$$

的解.

现在考虑偏微分方程组：

$$\partial y^i/\partial x^j=f^i_j(x,y),\quad i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m.$$

由上述定理可知, 若函数 $f^i_j(x,y)$ 是 $C^r(0\leqslant r\leqslant\omega)$ 可微的, 那么每一个解 $y=\psi(x)$ 都是 C^{r+1} 可微的. 这个事实被用于第六章定理 7.7 的证明中.

附录 2 连通的局部紧度量空间是可分的

若拓扑空间 M 存在至多可数的稠子集 D, 则称 M 为可分的. 若 M 的每一点都有可分的邻域, 则称 M 是局部可分的. 注意到对于度量空间来说, 可分性等价于第二可数公理 (参看 Kelley [1; p. 120]). 对于标题中所述结论的证明可分解成下列三个引理.

引理 1 紧度量空间是可分的.

本引理的证明可参看 Kelley [1. p. 138].

引理 2 局部紧的度量空间是局部可分的.

这是引理 1 的平凡推论.

下列引理归功于 Sierpinski [1].

引理 3 连通的局部可分的度量空间是可分的.

引理 3 的证明 令 d 是连通局部可分度量空间 M 的度量. 对于每一点 $x \in M$ 和每个正数 r, 令 $U(x;r)$ 是以 x 为中心以 r 为半径的球的内部, 即 $U(x;r) = \{y \in M; d(x,y) < r\}$. 对于 M 的两点 x 和 y, 若存在一个可分的 $U(x;r)$ 包含 y 和一个可分的 $U(y;r')$ 包含 x, 则称 x 和 y 是 R 相关的并且记作 xRy. 显然, 对于每一个 x, 都有 xRx, 而且 xRy 当且仅当 yRx.

对于 M 的每一个子集 A, 用 SA 表示与 A 的一点 R 相关的点的集合, 即 $SA = \{y \in M; yRx$ 对某个 $x \in A$ 成立$\}$. 置 $S^nA = SS^{n-1}A$, $n = 2,3,\cdots$. 若 $\{x\}$ 是由单个点 x 构成的集合, 则将 $S\{x\}$ 写成 Sx. 容易看出, $y \in S^nx$ 当且仅当 $x \in S^ny$. 现在我们要证明下列三个论断:

(a) 对每个 $x \in M$, Sx 是开的;

(b) 如果 A 是可分的, 那么 SA 也是可分的;

(c) 对于每个 $x \in M$, 置 $U(x) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S^nx$. 那么对于任何 $x, y \in M$, 要么 $U(x) \cap U(y)$ 为空集, 要么有 $U(x) = U(y)$.

(a) 的证明: 令 y 是 Sx 中的一点. 由于 xRy, 所以存在正数 r 和 r' 使得 $U(x;r)$ 和 $U(y;r')$ 是可分的而且有 $y \in U(x;r)$ 和 $x \in U(y;r')$. 因为 $d(x,y) < r'$, 所以有一个正数 r_1 使得

$$d(x,y) < r_1 < r'.$$

令 r_0 是使得下列关系成立的任何正数

$$r_0 < r' - r_1, \quad r_0 < r - d(x,y), \quad r_0 < r_1 - d(x,y).$$

只需证明 $U(y;r_0)$ 包含在 Sx 中即可. 如果 $z \in U(y;r_0)$, 那么

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + r_0 < \min\{r, r_1\}.$$

因此 z 在 $U(x;r)$ 中, 而 $U(x;r)$ 是可分的, 于是 x 在 $U(z;r_1)$ 中. 为了证明 $U(z;r_1)$ 是可分的. 我们将证明 $U(z;r_1)$ 包含在 $U(y;r')$ 中, 而后者是可分的. 令 $w \in U(z;r_1)$, 因而 $d(z,w) < r_1$. 于是

$$d(y,w) \leqslant d(y,z) + d(z,w) < d(y,z) + r_1 < r_0 + r_1 < r'.$$

从而 $w \in U(y;r')$. 这证明 zRx 对于每个 $z \in U(y;r_0)$ 成立. 即有 $U(y;r_0) \subset Sx$.

(b) 的证明: 令 A 是 M 的可分子集而 D 是 A 的可数稠子集. 只需要证明每个 $x \in SA$ 包含在一个中心是 D 的一点且半径为一有理数的可分球内即可. 因为只有可数个这样的球因而这些球的并是可分的. 令 $x \in SA$, 则有 $y \in A$ 使得 xRy 并且有一个可分的球 $U(y;r)$ 包含 x. 令 r_0 是一个正有理数且使得 $d(x,y) < r_0 < r$. 因为 D 在 A 中是稠密的, 所以有 $z \in D$ 使得

$$d(z,y) < \min\{r_0 - d(x,y), r - r_0\}.$$

只需证明 $U(z;r_0)$ 包含 x 而且是可分的. 从

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) < r_0$$

可知 $x \in U(z;r_0)$. 为了证明 $U(z;r_0)$ 是可分的, 我们证明 $U(z;r_0)$ 包含在 $U(y;r)$ 中, 而 $U(y;r)$ 是可分的. 如果 $w \in U(z;r_0)$, 那么

$$d(w,y) \leqslant d(w,z) + d(z,y) < r_0 + d(z,y) < r,$$

从而 $w \in U(y;r)$.

(c) 的证明: 假设 $U(x) \cap U(y)$ 是非空的并且令 $z \in U(x) \cap U(y)$. 那么对于某个 m 和 n, $z \in S^m x$ 且 $z \in S^n y$. 从 $z \in S^m x$ 得 $x \in S^m z$. 从而 $x \in S^m z \subset S^{m+n} y$. 这蕴涵着对每个 k 都有 $S^k x \subset S^{k+m+n} y$, 因而 $U(x) \subset U(y)$. 类似地得出 $U(y) \subset U(x)$, 这样就证明了 (c) 成立.

由 (a), 对 M 的任何子集 A, $SA = \bigcup\limits_{x \in A} Sx$ 是开的, 从而对每个 $x \in M$, $U(x)$ 是开的. 由 (b) 对于每个 n. $S^n x$ 是可分的, 从而 $U(x)$ 是可分的. 因为 M 是连通的, 又因每个 $U(x)$ 是开的, 所以 (c) 蕴涵着对于每个 $x \in M$, $M = U(x)$. 从而 M 是可分的. 这就完成了标题中所述论断的证明.

现在我们有条件来证明下列定理.

定理 对于连通可微流形 M 而言, 下列条件互相等价:

(1) 在 M 上存在 Riemann 度量;

(2) M 是可度量化的;

(3) M 满足第二可数公理;

(4) M 是仿紧的.

证明 蕴涵关系 (1)→(2) 已在第六章命题 3.5 中证明. 正如本附录的开头所述, 对于度量空间而言, 第二可数公理等价于可分性. 因此, 蕴涵关系 (2)→(3) 是标题中所述论断的推论. 如果 (3) 成立, 那么由 Urysohn 度量化定理 (参看 Kelley[1.p.125]), M 是可度量化的, 并且因此 M 是仿紧的 (参看 Kelley[1.p.156]). 这说明 (3) 蕴涵 (4). 蕴涵关系 (4)→(1) 从第三章的命题 1.4 得出. 证毕.

附录 3　单位分解

令 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是可微流形 M 的局部有限的开覆盖, 即 M 的每一点都有一个邻域仅与有限多个 U_i 相交. M 上的一个可微函数族 $\{f_i\}$, 若满足下列条件, 则称之为从属于覆盖 $\{U_i\}$ 的单位分解:

(1) $0 \leqslant f_i \leqslant 1$ 在 M 上对每个 $i \in I$ 成立;

(2) 每个 f_i 的支集, 即集合 $\{x \in M; f_i(x) \neq 0\}$ 的闭包, 包含在相应的 U_i 中;

(3) $\sum\limits_i f_i(x) = 1$.

注意到在 (3) 中. 对于每一点 $x \in M$, 除了对有限多个 i 之外, 均有 $f_i(x) = 0$. 因而对每个 x, $\sum\limits_i f_i(x)$ 都是一个有限和.

首先来证明下列定理.

定理 1　令 $\{U_i\}$ 是仿紧流形 M 的局部有限开覆盖使得每个 U_i 有紧闭包 $\bar{U}_i$, 则存在从属于 $\{U_i\}$ 的单位分解 $\{f_i\}$.

证明　首先证明下列三个引理, 其中前两个在不假定 M 为仿紧的条件下仍然有效, 而第三个则对任何仿紧拓扑空间成立.　证毕.

引理 1　对 M 的每一点 x 和 x 的每一个邻域 U, 都存在 M 上的 (C^∞) 可微函数 f 使得 (1) 在 M 上, $0 \leqslant f \leqslant 1$; (2) $f(x) = 1$; (3) 在 U 外 $f = 0$.

引理 1 的证明　容易把引理 1 归结为 $M = \mathbf{R}^n$, $x = 0$ 且 $U = \{(x^1, \cdots, x^n); |x^i| < a\}$ 的情况. 然后对每个 j $(j = 1, \cdots, n)$, 令 $f_j(x^j)$ 是一个可微函数使得 $f_j(0) = 1$, 并且对于 $|x^j| \geqslant a$, $f_j(x^j) = 0$. 置 $f(x^1, \cdots, x^n) = f_1(x^1) \cdots f_n(x^n)$. 这就证明了引理 1.　证毕.

引理 2　对 M 的每个紧子集 K 和 K 的每个邻域 U, 都存在 M 上的可微函数 f 使得 (1) 在 M 上, $f \geqslant 0$; (2) 在 K 上 $f > 0$; (3) 在 U 外, $f = 0$.

引理 2 的证明　对 K 的每一点 x, 令 f_x 是 M 上的可微函数并且具有引理 1 中 f 的性质, 令 V_x 是由 $f_x > \dfrac{1}{2}$ 定义的 x 的邻域. 因为 K 是紧的, 所以存在 K 的有限个点 $x_1, \cdots, x_k$ 使得 $V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_k} \supset K$. 然后再置

$$f = f_{x_1} + \cdots + f_{x_k}.$$

这就完成了引理 2 的证明.　证毕.

引理 3　令 $\{U_i\}$ 是 M 的局部有限开覆盖, 那么存在 $\{U_i\}$ 的 (具有相同指标集的) 局部有限的开加细 $\{V_i\}$ 使得 $\bar{V}_i \subset U_i$ 对每个 i 成立.

引理 3 的证明 对每一点 $x \in M$, 令 W_x 是 x 的一个开邻域并且使得 $\bar{W}_x$ 包含在某个 U_i 中. 令 $\{W'_\alpha\}$ 是 $\{W_x; x \in M\}$ 的一个局部有限的开加细. 对每个 i, 令 V_i 是所有其闭包包含在 U_i 中 W'_α 的并. 因为 $\{W'_\alpha\}$ 是局部有限的, 所以有 $\bar{V}_i = \cup \bar{W}'_\alpha$, 其中并运算是在所有使得 $\bar{W}'_\alpha \subset U_i$ 的 α 上进行的. 因而得到一个具有所要求的性质的开覆盖 $\{V_i\}$.

现在我们已经有条件来完成定理 1 的证明. 令 $\{V_i\}$ 如引理 3 所述. 对每个 i, 令 W_i 是一个开集且使得 $\bar{V}_i \subset W_i \subset \bar{W}_i \subset U_i$. 由引理 2, 对每个 i 都存在 M 上的可微函数 g_i 使得 (1) 在 M 上, $g_i \geqslant 0$; (2) 在 $\bar{V}_i$ 上, $g_i > 0$; (3) 在 W_i 外, $g_i = 0$. 因为每个 g_i 的支集包含 $\bar{V}_i$ 并且被包含在 U_i 中, 又因为 $\{U_i\}$ 是局部有限的, 所以和 $g = \sum_i g_i$ 在 M 上有定义并且可微. 因为 $\{V_i\}$ 是 M 的开覆盖, 所以在 M 上, $g > 0$. 对每个 i 置

$$f_i = g_i / g.$$

那么 $\{f_i\}$ 就是从属于 $\{U_i\}$ 的一个单位分解. 证毕.

令 f 是在 M 的一个子集 F 上定义的函数, 如果对每一点 $x \in F$, 在 x 的一个开邻域 V_x 上存在一个可微函数 f_x 使得在 $F \cap V_x$ 上, $f = f_x$, 则称 f 是在 F 上可微的.

定理 2 令 F 是仿紧流形 M 的一个闭子集. 那么在 F 上定义的每个可微函数 f 都能扩张成 M 上的可微函数.

证明 对于每一个 $x \in F$, 令 f_x 是 x 的开邻域 V_x 上的可微函数并且使得在 $F \cap V_x$ 上, $f_x = f$. 令 U_i 是由 $M \backslash F$ 和 $V_x (x \in F)$ 组成的 M 的覆盖的一个局部有限的开加细. 对每个 i, 在 U_i 上定义一个可微函数 g_i 如下: 若 U_i 包含于某个 V_x 中, 则选取这样一个 V_x 并且置

$$g_i = f_x \text{在 } U_i \text{ 上的限制}.$$

若没有 V_x 包含 U_i, 则置

$$g_i = 0.$$

令 $\{f_i\}$ 是从属于 $\{U_i\}$ 的单位分解. 定义

$$g = \sum_i f_i g_i.$$

因为 $\{U_i\}$ 是局部有限的, 所以 M 的每一点都有一个邻域使得 $\sum_i f_i g_i$ 在该邻域中实际上是一个有限和. 因而 g 在 M 上是可微的. 容易看出 g 是 f 的扩张. 证毕.

按照层论的术语, 定理 2 意味着仿紧流形 M 上的可微函数的芽层是软层 (在 Godement[1] 中称为 mou 层).

附录 4　Lie 群的弧连通子群

Kuranishi 和 Yamabe 证明了 Lie 群的每个弧连通子群都是 Lie 子群 (参见 Yamabe[1]). 我们在这里将证明下列较弱的定理, 但对于我们的目的而言这已经足够了 (参看第二章定理 4.2). 这个结果本质上是属于 Freudenthal[1].

定理　令 G 是一个 Lie 群且 H 是 G 的一个子群使得 H 的每一个元素均可由一条包含在 H 中的分段 C^1 可微曲线连接到单位元 e 上, 则 H 是 G 的一个 Lie 子群.

证明　令 S 是包含在 H 中的 C^1 可微曲线的切向量 $X \in T_e(G)$ 的集合. 将 $T_e(G)$ 等同于 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 则有

引理　S 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数.

引理的证明　给定 G 中的一条曲线 x_t, 用 $\dot{x}_t$ 表示曲线在 x_t 点的切向量, 令 r 为任何实数并且置 $z_t = x_{rt}$, 那么 $\dot{z}_0 = r\dot{x}_0$. 这说明若 $X \in S$, 则 $rX \in S$. 令 x_t 和 y_t 都是 G 中的曲线并且使得 $x_0 = y_0 = e$. 若置 $v_t = x_t y_t$, 那么 $\dot{v}_0 = \dot{x}_0 + \dot{y}_0$ (参看 Chevalley [1. pp. 120–122]). 这说明若 $X, Y \in S$, 则 $X + Y \in S$. 存在曲线 w_t 使得 $w_{t^2} = x_t y_t x_t^{-1} y_t^{-1}$ 并且有 $\dot{w}_0 = [\dot{x}_0, \dot{y}_0]$ (参看 Chevalley [1, pp. 120–122] 或 Pontrjagin[1, p. 238]). 这说明若 $X, Y \in S$, 则 $[X, Y] \in S$. 这就完成了引理的证明.

因为 $S \subset T_e(G) = \mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数, 所以分布 $x \to L_x S$ $(x \in G)$ 是对合的 (其中 L_x 是由 x 产生的左平移) 而且它的经过 e 点的极大积分流形 (记为 K) 是 G 的对应于子代数 S 的 Lie 子群. 下面来证明 $H = K$.

首先证明 $K \supset H$. 令 a 是 H 的任意点并且 $\tau = x_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是从 e 到 a 的一条曲线因而 $e = x_0$ 且 $a = x_1$. 可以断定对所有 t, 向量 $\dot{x}_t$ 在 Lx_tS 中. 实际上, 对每个固定的 t, $L_{x_t}^{-1}(\dot{x}_t)$ 是曲线 $L_{x_t}^{-1}(\tau)$ 在 e 点的切向量从而在 S 中. 这就证明了上述论断. 因为对所有 t, $\dot{x}_t \in L_{x_t} S$ 且 $x_0 = e$, 所以曲线 x_t 位于分布 $x \to L_x S$ 的极大积分流形 K 中 (参看第二章定理 7.2 的引理 2). 因而 $a \in K$, 这说明 $K \supset H$.

为了证明 $H \supset K$, 令 $e_1, \cdots, e_k$ 是 S 的基并且令 $x_t^1 \cdots x_t^k$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是 H 中的曲线使得 $x_0^i = e$ 和 $\dot{x}_0^i = e_i$ $(i = 1, \cdots, k)$. 考虑由 $f(t_1, \cdots, t_k) = x_{t_1}^1 \cdots x_{t_k}^k$ $((t_1, \cdots, t_k) \in U)$ 定义的从 $\mathbf{R}^k$ 中原点的一个邻域 U 到 K 中的映射 f. 因为 $\dot{x}_0^1, \cdots, \dot{x}_0^k$ 构成 S 的基, 所以 $f: U \to K$ 在原点的微分是非奇异的. 取 U 充分小, 则可以假定 f 是从 U 到 K 的开子集 $f(U)$ 上的微分同胚. 从 f 的定义有 $f(U) \subset H$. 这说明 e 在 K 中的一个邻域包含在 H 中. 因为 K 是连通的, 所以 $K \subset H$.　证毕.

附录 5　$O(n)$ 的不可约子群

本附录要证明下列两个定理.

定理 1　令 G 是 $O(n)$ 的不可约地作用于 n 维实向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 上的子群. 那么 $\boldsymbol{R}^n$ 上的每个经 G 作用不变的对称双线性型都是标准内积 $(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n} x^i y^i$ 的倍数.

定理 2　令 G 是 $SO(n)$ 的一个不可约地作用在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的连通 Lie 子群, 那么 G 在 $SO(n)$ 中是闭的.

我们从下列引理开始.

引理 1　令 G 是 $GL(n;\boldsymbol{R})$ 的一个不可约地作用在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的子群. 令 A 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个线性变换并且可与 G 的每个元素交换. 那么

(1) 若 A 是幂零的, 则 $A=0$.

(2) 在 $\boldsymbol{R}$ 上, A 的极小多项式是不可约的.

(3) A 仅有两种可能：或者 $A=aI_n$ (a 为实数, I_n 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的恒等变换); 或者 $A=aI_n+bJ$, 其中, a 和 b 为实数, $b\neq 0$, J 是一个使得 $J^2=-I_n$ 的线性变换, 且 n 是偶数.

证明　(1) 令 k 是使得 $A^k=0$ 的最小整数. 假设 $k\geqslant 2$, 则将导致矛盾. 令 $W=\{x\in\mathbf{R}^n; Ax=0\}$. 因为 W 是经 G 作用不变的, 所以只有两种可能；要么 $W=\mathbf{R}^n$, 要么 $W=(0)$. 在第一种情况下, $A=0$. 在第二种情况下, A 是非奇异的并且 $A^{k-1}=A^{-1}$, $A^k=0$.

(2) 如果 A 的极小多项式是积式 $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 且满足 $(f_1,f_2)=1$, 那么 $\mathbf{R}^n=W_1+W_2$ (直和), 其中 $W_i=\{x\in\mathbf{R}^n; f_i(A)x=0\}$. 因为 G 的每个元素均与 A 交换从而与 $f_i(A)$ 交换. 由此可知 W_i 都是经 G 作用不变的. 但这与不可约性的假设矛盾. 因而有 $f(x)=g(x)^k$, 其中 $g(x)$ 是不可约的. 将 (1) 应用于 $g(A)$, 则看出, $f(A)=g(A)^k=0$ 蕴涵着 $g(A)=0$. 因而 $f=g$.

(3) 由 (2), A 的极小多项式 $f(x)$, 或者是 $(x-a)$, 或者是 $(x-a)^2+b^2$ 且 $b\neq 0$. 在第一种情况下, $A=aI_n$. 在第二种情况下. 令 $J=(A-aI_n)/b$. 那么 $J^2=-I_n$ 而且 $A=aI_n+bJ$. 因有 $(-1)^n=\det J^2=(\det J)^2>0$. 所以 n 必为偶数.　证毕.

引理 2　令 G 是 $O(n)$ 的不可约作用于 $\mathbf{R}^n$ 上的一个子群. 令 $A,B,\cdots$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的可与 G 交换的线性变换.

(1) 如果 A 是对称的, 即 $(Ax,y)=(x,Ay)$, 那么 $A=aI_n$.

(2) 若 A 是反对称的, 即 $(Ax, y) + (x, Ay) = 0$, 那么 $A = 0$ 或者 $A = bJ$, 其中 $J^2 = -I_n$ 并且 $n = 2m$.

(3) 若 $A \neq 0$, B 是反对称的并且 $AB = BA$, 那么 $B = cA$.

证明　(1) 由引理 1 的 (3), $A = aI_n + bJ$, 其中 b 可能为零. 若 A 是对称的, 那么 bJ 也是对称的. 若 $b \neq 0$, 则 J 是对称的, 因而有 $(Jx, Jx) = (x, J^2x) = -(x, x)$. 这对 $x \neq 0$ 是矛盾的.

(2) 因为反对称变换 A 的特征值为 0 或者纯虚数, 所以 A 的极小多项式或为 x 或为 $x^2 + b^2 (b \neq 0)$. 在第一种情况下, $A = 0$; 在第二种情况下, $A = -bJ$ 并且满足 $J^2 = -I_n$.

(3) 令 $A = bJ, B = b'K$, 其中 $J^2 = K^2 = -I_n$. 那么有 $JK = KJ$. 我们要证明 $\mathbf{R}^n = W_1 + W_2$ (直和), 其中, $W_1 = \{x \in \mathbf{R}^n; Jx = Kx\}$, $W_2 = \{x \in \mathbf{R}^n; Jx = -Kx\}$. 显然 $W_1 \cap W_2 = (0)$. 每个 $x \in \mathbf{R}^n$ 都有 $y + z$ 的形式, 其中 $y \in W_1$ 且 $z \in W_2$, 通过置 $y = (x - JKx)/2$ 和 $z = (x + JKx)/2$ 可以看出这一点. W_1 和 W_2 都是经 G 作用不变的, 这是因为 J 和 K 均与 G 的每一个元素可交换. 因为 G 是不可约的, 所以或者有 $W_1 = \mathbf{R^n}$, 或者有 $W_2 = \mathbf{R^n}$, 即要么 $K = J$. 要么 $K = -J$. 这意味着 $B = cA$ 对于某个 c 成立.　证毕.

定理 1 的证明　对于任何对称的双线性型 $f(x, y)$ 都有对称线性变换 A 使得 $f(x, y) = (Ax, y)$. 若 f 是经 G 作用不变的, 那么 A 与 G 的每个元素可交换. 由引理 2 的 (1), $A = aI_n$, 从而 $f(x, y) = a \cdot (x, y)$.　证毕.

定理 2 的证明　首先证明 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的中心 $\mathfrak{z}$ 至多是 1 维的. 令 $A \neq 0$ 且 $B \in \mathfrak{z}$. 因为 A 和 B 都是可与 G 的每个元素交换的反对称线性变换, 所以引理 2 的 (3) 蕴涵着 $B = cA$ 对某个 c 成立. 因而 $\dim\mathfrak{z} \leqslant 1$, 如果 $\dim\mathfrak{z} = 1$, 那么 $\mathfrak{z} = \{cJ; c \text{ 为实数}\}$, 其中 J 是某个满足 $J^2 = -I_n$ 的反对称线性变换. 在 $\boldsymbol{R}^n$ 的某个规范正交基底下, J 可用一个分块矩阵表示且每一子块为 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 单参数子群 $\exp tJ$ 由分块矩阵构成, 而且它的每一子块为 $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, 因而与圆周群同构.

因为 $\mathfrak{g}$ 是所有反对称矩阵组成的 Lie 代数的子代数, 所以 $\mathfrak{g}$ 有一个在 $\mathrm{ad}(G)$ 作用下不变的正定内积 $(A, B) = -\mathrm{tr}(AB)$. 由此可知, 中心 $\mathfrak{z}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中关于这个内积的正交补 $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个理想而且 $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} + \mathfrak{s}$ 是直和. 如果 $\mathfrak{s}$ 包含一个真理想, 记为 $\mathfrak{s}_1$, 那么 $\mathfrak{s}_1$ 在 $\mathfrak{s}$ 中的正交补 $\mathfrak{s}'$ 是 $\mathfrak{s}$ 的一个理想 (实际上是 $\mathfrak{g}$ 的理想) 并且 $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}'$. 因而可以看出 $\mathfrak{s}$ 是单理想的直和: $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 + \cdots + \mathfrak{s}_k$. 我们已经看到由 $\mathfrak{z}$ 生成的连通 Lie 群在 $SO(n)$ 中是闭的. 现在我们要证明由 $\mathfrak{s}$ 生成的连通 Lie 群在 $SO(n)$ 中是闭的. 一旦证明了这一点, 也就完成了定理 2 的证明.　证毕.

我们首先注意到 Yosida(吉田耕作)[1] 证明了下列结果. $GL(n;\boldsymbol{C})$ 的每个连通半单 Lie 子群 G 在 $GL(n;\boldsymbol{C})$ 中是闭的. 他的证明是基于 Weyl 的一个定理——半单 Lie 代数的任何表示是完全可约的, 并且在以 $GL(n;\mathbf{R})$ 代替 $GL(n;\boldsymbol{C})$ 时, 证明仍然有效. 其实, 在 G 是 $SO(n)$ 的子群的情况下, 无需使用 Weyl 定理. 现在我们用与 Yosida 同样的方法证明下列结果.

$SO(n)$ 的连通半单 Lie 子群 G 在 $SO(n)$ 中是闭的.

证明　因为 $\mathfrak{g}$ 是一些维数 >1 的单理想 $\mathfrak{g}_1,\cdots,\mathfrak{g}_k$ 的直和, 又因为对每个 i, $\mathfrak{g}_i=[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_i]$, 故由此可知 $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. 现在将 $SO(n)$ 从而将其子群 G 看作是作用在带有经 $SO(n)$ 作用不变的标准 Hermite 内积的复向量空间 $\boldsymbol{C}^n$ 上, 那么 $\boldsymbol{C}^n$ 是一些在 G 的作用下不变的和不可约的复子空间 $V_1,\cdots,V_r$ 的直和. 假若 G 在 $SO(n)$ 中不是闭的, 则令 $\bar{G}$ 为其闭包, 由于 $\bar{G}$ 是 $SO(n)$ 的连通闭子群, 因而是一个 Lie 子群. 令 $\bar{\mathfrak{g}}$ 是它的 Lie 代数. 显然 $\mathfrak{g}\subset\bar{\mathfrak{g}}$. 因为 $\mathrm{ad}(G)\mathfrak{g}\subset\mathfrak{g}$, 所以 $\mathrm{ad}(\bar{G})\mathfrak{g}\subset\mathfrak{g}$, 这就蕴涵着 $\mathfrak{g}$ 是 $\bar{\mathfrak{g}}$ 的理想. 正如我们已经指出的那样, $SO(n)$ 的 Lie 代数有一个在 $\mathrm{ad}(SO(n))$ 作用下不变的正定内积, 由此可知, $\bar{\mathfrak{g}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}$ 在 $\bar{\mathfrak{g}}$ 中的正交补 $\mathfrak{u}$ 的直和. $\boldsymbol{C}^n$ 的每个直和项 V_i 也是经 $\bar{G}$ 从而经 $\bar{\mathfrak{g}}$ 在 $\boldsymbol{C}^n$ 上的作用不变的. 对任何 $A\in\bar{\mathfrak{g}}$, 用 A_i 表示它在 V_i 上的作用. 对于任何 $A,B\in\mathfrak{g}$, 显然有 $\mathrm{tr}[A_i,B_i]=0$. 因为 $A\to A_i$ 是 $\mathfrak{g}$ 在 V_i 上的表示, 又因 $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, 所以对每个 $A\in\mathfrak{g}$ 均有 $\mathrm{tr}A_i=0$. 因而 $a\in G$ 在每个 V_i 上的限制的行列式为 1(参看 Chevalley [1; p.6] 的推论 1). 由连续性, $a\in\bar{G}$ 在每个 V_i 上的限制的行列式为 1. 这意味着对每个 $A\in\bar{\mathfrak{g}}$ 和每一个 i 都有 $\mathrm{tr}A_i=0$. 现在令 $B\in\mathfrak{u}$, 它在 V_i 上的作用 B_i 与 $\{A_i;A\in\mathfrak{g}\}$ 的作用交换. 由 Schur 引理 (它是引理 1, (2) 的明显推论, 它对任何域代替 $\mathbf{R}$ 仍然有效), 可得 $B_i=b_iI$, 其中 I 是 V_i 的恒等变换. 因为 $\mathrm{tr}B_i=0$, 由此可知 $b_i=0$, 即 $B_i=0$. 因为对于每个 i 都是如此, 故有 $B=0$. 这意味着 $\mathfrak{u}=(0)$ 和 $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}$. 这证明 $\bar{G}=G$, 即 G 在 $SO(n)$ 中是闭的.　证毕.

附录 6　Green 定理

令 M 是一个 n 维定向可微流形. 如果 M 上的 n 形式 ω 对每个定向的局部坐标系 $x^1,\cdots,x^n$ 都有 $\omega\left(\partial/\partial x^1,\cdots,\partial/\partial x^n\right)>0$, 则将 ω 称为一个体积元. 利用固定的体积元 ω (仍用更直观的记号 dv 表示) 可以定义任何具有紧支集的连续函数 f 的积分 $\int_M f dv$ (参看 Chevalley [1; pp. 161–167]).

对于 M 上的每一个向量场 X 及一个固定的体积元 ω, X 的散度 (记为 $\mathrm{div}X$) 是 M 上由下式定义的函数:

$$(\mathrm{div}X)\omega = L_X\omega,$$

其中 L_X 是沿 X 方向的 Lie 微分.

Green 定理　令 M 是一个定向的紧流形并且带有一个固定的体积元 $\omega = dv$. 那么对于 M 上的每个向量场 X,

$$\int_M \mathrm{div}X\mathrm{d}v = 0.$$

证明　令 φ_t 是由 X 生成的单参数变换群 (参看第一章命题 1.6). 因为有 (参看 Chevalley[1; p. 165])

$$\int_M \varphi_t^{-1*}\omega = \int_M \omega,$$

$\int_M \varphi_t^{-1*}\omega$ 看作 t 的函数是一个常函数. 由 L_X 的定义.

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^{-1*}\omega)\right]_{t=0} = -L_X\omega.$$

因而有

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_M \varphi_t^{-1*}\omega\right]_{t=0} = \int_M \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^{-1*}\omega)\right]_{t=0} \\ &= -\int_M L_X\omega = -\int_M \mathrm{div}X\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

证毕.

评注 1　只要 X 具有紧支集, 则上面的公式对于非紧流形 M 也成立.

评注 2　上面的公式也可以从 Stokes 公式导出. 实际上, 因为 $d\omega = 0$, 所以有 $L_X\omega = d \circ i_X\omega + i_X \circ d\omega = d \circ i_X\omega$. 于是有

$$\int_M L_X\omega = \int_{\partial M} i_X\omega = 0.$$

命题　令 M 是一个带有固定体积元 $\omega = dv$ 的定向流形. 若 Γ 是 M 上的无挠仿射联络并且使得 ω 关于 Γ 是平行的. 那么对于 M 上的每个向量场 X,

$$(\mathrm{div}X)_x = \text{自同态 } (V \to \nabla_V X) \text{ 的迹}, \quad V \in T_X(M).$$

证明　就像在第六章 6.2 节中那样, 令 A_X 是由 $A_X = L_X - \nabla_X$ 定义的 (1, 1) 型张量场. 令 $X_1, \cdots, X_n$ 是 $T_X(M)$ 的基. 因为 $\nabla_X\omega = 0$, 又因作为一导算子, A_X 将每个函数映射为零, 所以有

$$\begin{aligned}(L_X\omega)(X_1, \cdots, X_n) &= (A_X\omega)(X_1, \cdots, X_n)\\ &= A_X(\omega(X_1, \cdots, X_n)) - \sum_i \omega(X_1, \cdots, A_XX_i, \cdots, X_n)\\ &= -\sum_i \omega(x_1, \cdots, A_XX_i, \cdots, X_n)\\ &= -(\mathrm{tr}A_X)_x\omega(X_1, \cdots, X_n).\end{aligned}$$

这说明

$$\mathrm{div}X = -\mathrm{tr}A_X.$$

于是命题的结论可以从下列公式 (参看第六章命题 2.5) 和 $T = 0$ 的假设而得出:

$$A_XY = -\nabla_Y X - T(X, Y). \quad \text{证毕.}$$

评注 3　公式 $\mathrm{div}X = -\mathrm{tr}A_X$ 在不假定 $T = 0$ 的情况下仍然成立.

令 M 是一个定向 Riemann 流形. 在 M 上定义一个自然体积元 dv. 在 M 的任意一点 x, 令 $X_1, \cdots, X_n$ 是 $T_x(M)$ 的与 M 的定向相容的规范正交基. 通过令

$$dv(X_1, \cdots, X_n) = 1/n!$$

定义一个 n 形式 dv. 容易验证 dv 的定义不依赖于标架 $X_1, \cdots, X_n$ 的选取. 利用相容局部坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 和度量张量 g 的分量 g_{ij} 来表述, 则有

$$dv = \sqrt{G}dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad \text{其中 } G = \det(g_{ij}).$$

实际上, 令 $(\partial/\partial x^i)_x = \sum_k C_i^k X_k$, 因而在 x 点, $g_{ij} = \sum_k C_i^k C_j^k$ 并且 $G = \det(C_i^k)^2$. 因为 $\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^n$ 和 $X_1, \cdots, X_n$ 具有相同的定向, 所以有 $\det(C_i^k) = \sqrt{G} > 0$.

从而在 x 点有

$$\begin{aligned} dv(\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^n) &= \sum_{i_1,\cdots,i_n} \varepsilon C_1^{i_1} \cdots C_n^{i_n} dv(X_{i_1}, \cdots, X_{i_n}) \\ &= \sum_{i_1,\cdots,i_n} \varepsilon C_1^{i_1} \cdots C_n^{i_n} dv(X_1, \cdots, X_n) \\ &= \frac{1}{n!} \det(C_i^k) = \frac{1}{n!}\sqrt{G}, \end{aligned}$$

其中根据 $(i_1, \cdots, i_n)$ 是 $(1, \cdots, n)$ 的偶排列或奇排列而相应地 ε 取 1 或 -1.

因为沿 M 上任何曲线 τ 的平行移动将每一个规范正交标架映射成规范正交标架并且保持定向, 所以体积元 dv 是平行的. 因而对于 Riemann 流形的体积元 dv, Green 定理和上面的命题仍然成立.

附录 7　因子分解引理

令 M 是一个可微流形. 对于定义在单位区间 $I=[0,1]$ 上并且满足 $x(0)=y(0)$ 和 $x(1)=y(1)$ 的两条连续曲线 $x(t)$ 和 $y(t)$, 如果存在一个连续映射 $f:(t,s)\in I\times I\to f(t,s)\in M$ 使得 $f(t,0)=x(t)$, $f(t,1)=y(t)$, $f(0,s)=x(0)=y(0)$, $f(1,s)=x(1)=y(1)$ 对于 I 中的一切 t 和 s 成立, 则称这两条曲线 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是相互同伦的. 当 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是分段 C^k 可微曲线 (简称分段 C^k 曲线) 时, 若映射 f 能以某种方式选取使得它在 $I\times I$ 上是分段 C^k 的, 即对于某个划分 $I=\sum_{i=1}^{r} I_i$, f 对每一数对 (i,j) 都是从 $I_i\times I_j$ 到 M 中的 C^k 可微映射, 那么 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是分段 C^k 同伦的.

引理　如果两条分段 C^k 曲线 $x(t)$ 和 $y(t)$ 相互同伦, 那么它们是分段 C^k 同伦的.

证明　可取一个适当的划分 $I=\sum_{i=1}^{r} I_r$ 使得对于每个数对 (i,j), $f(I_i\times I_j)$ 被包含在某个坐标邻域中. 通过在小矩形 $I_i\times I_j$ 中修改映射 f, 即可得到 $x(t)$ 和 $y(t)$ 之间的分段 C^k 同伦.　证毕.

令 $\mathfrak{U}$ 是任意一个开覆盖. 我们将说明 x 点处的一条闭曲线 τ, 如果它能分解成三条曲线的复合 $\tau=\mu^{-1}\cdot\sigma\cdot\mu$, 其中 μ 是从 x 到某一点 y 的曲线, 而 σ 是 y 点处的一条闭曲线并且包含在 $\mathfrak{U}$ 的一个开集中, 则将 x 点的闭曲线 τ 称为一个 $\mathfrak{U}$ 套索 (lasso). 对于两条曲线 τ 和 τ', 如果 τ' 能够从 τ 经过有限次使用由单个点组成的平凡曲线置换形如 $\mu^{-1}\cdot\mu$ 的部分而得出或者反过来也成立, 则称这两条曲线 τ 和 τ' 是等价的. 现在利用这些定义来证明下列引理.

因子分解引理　令 $\mathfrak{U}$ 是 M 的任意一个开覆盖.

(a) 同伦于零的任何闭曲线等价于有限个 $\mathfrak{U}$ 套索之积.

(b) 如果曲线还是分段 C^k 的, 那么该积中的每个 $\mathfrak{U}$ 套索可被选取为 $\mu^{-1}\cdot\sigma\cdot\mu$ 的形式, 其中 μ 是分段 C^k 曲线而 σ 是 C^k 曲线.

证明　(a) 令 $\tau=x(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 使得 $x=x(0)=x(1)$. 令 f 是一个同伦 $I\times I\to M$ 使得 $f(t,0)=x(t)$, $f(t,1)=x$, $f(0,s)=f(1,s)=x$ 对 I 中的一切 t 和 s 成立. 将正方形 $I\times I$ 分成 m^2 个相等的小正方形并且使得每个小正方形在 f 下的象位于覆盖 $\mathfrak{U}$ 的某个开集中. 对于每个整数对 (i,j) $(1\leqslant i,j\leqslant m)$, 令 $\lambda(i,j)$ 是

正方形 $I \times I$ 中接下列次序连接格点的线段组成的闭曲线:

$$(0,0) \to (0,j/m) \to ((i-1)/m, j/m) \to ((i-1)/m, (j-1)/m)$$
$$\to (i/m, (j-1)/m) \to (i/m, j/m) \to ((i-1)/m, j/m) \to (0, j/m) \to (0,0).$$

从几何形状上看, $\lambda(i,j)$ 就像一个套索. 令 $\tau(i,j)$ 是 $\lambda(i,j)$ 在映射 f 之下的象, 那么 τ 等价于 $\mathfrak{U}$ 套索的积:

$$\tau(m,m)\cdots\tau(1,m)\cdots\tau(m,2)\cdots\tau(1,2)\cdot\tau(m,1)\cdots\tau(1,1).$$

(b) 由上面的引理, 我们可以假设同伦映射 f 是分段 C^k 的. 必要时可将 m 选取得足够大, 则还可以假设在 m^2 个小正方形之中的每一个上, f 都是 C^k 的. 那么每个套索 $\tau(i,j)$ 就具有所要求的性质.　证毕.

上述因子分解引理取自 Lichnerowicz [2; p. 51].

注释 1　联络与和乐群

1. 虽然 3 维 Euclid 空间中曲面的微分几何可以追溯到 Gauss, 但是 Riemann 空间的概念则起源于 1854 年 Riemann 的就职演说 [1]. Christoffel 符是由 Christoffel[1] 于 1869 年引进的. 由 Ricci 在一系列论文中创立和发展的张量运算在 Levi-Civita 和 Ricci 于 1901 年发表的论文 [1] 中做了系统地叙述. Levi-Civita[1] 对在张量运算中形式地引进的协变微分给出了几何上的解释. 他还在 1917 年引进了曲面上的平行位移概念. 这个发现导致 Weyl[1, 2] 和 E. Cartan[1, 2, 4, 5, 8, 9] 引进了仿射联络、射影联络和保形联络. 虽然 Cartan 的处理方法是最自然的而且最好地揭示了联络的几何性质, 但是直到 1950 年才由 Ehresmann[2] 从当代数学的观点阐明了联络的一般概念. 他的工作被陈省身 [1, 2], Ambrose-Singer [1], Kobayashi [6], Nomizu [7], Lichnerowicz [2] 及其他数学家继承和发展.

Ehresmann [2] 首次把任意纤维丛上的联络定义为水平子空间构成的场, 并且证明了任何丛上联络的存在性. 他还引进了联络形式 ω 并且用结构方程定义曲率形式 Ω. 本书中所给出的 Ω 的定义归功于 Ambrose 和 Singer [1], 他们还证明了结构方程 (第二章定理 5.2). 陈省身 [1,2] 利用在结构群的 Lie 代数中取值的 U_α 上的一组微分形式 ω_α 定义了一种联络, 其中 $\{U_\alpha\}$ 是底流形的开覆盖 (见第二章命题 1.4).

Ehresmann [2] 还定义了 Cartan 联络的概念, 它包括仿射联络、射影联络和共形联络为其特例. 另外也可以参看 Kobayashi [6] 和 Takizawa [1]. 在正文中我们已经详细叙述了线性联络和仿射联络之间的关系.

2. 和乐群的概念归功于 E. Cartan [1, 6]. 和乐群是一种 Lie 群这个事实直到 Borel 和 Lichnerowicz [1] 给出明确的证明之后才被认为是理所当然的, 甚至对于 Riemann 联络也是如此. E. Cartan 的和乐定理 (第二章定理 8.1) 首先由 Ambrese-Singer[1] 给出严格的证明. 该定理的证明由 Nomizu [7] 和 Kobayashi [6] 通过先证明约化定理 (第二章定理 7.1) 而加以简化, 而约化定理实质上应当归功于 Cartan 和 Ehresmann. 由 Kobayashi 证明了定理 8.1 实质上等价于下列事实. 对于主纤维丛 $P(M,G)$, 考虑 $T(M)$ 上带结构群 $T(G)$ 的主纤维丛 $T(P)$, 其中 $T(\ )$ 表示切丛. 对于 P 上的任何联络 Γ, 在 $T(P)$ 中都存在自然诱导的联络 $T(\Gamma)$, 它的和乐群是 $T(\Phi)$, 其中的 Φ 是 Γ 的和乐群.

Hano 和 Ozeki [1] 及 Nomizu [5] 的结果 (第二章定理 8.2) 大意是 $P(M,G)$ 的结构群 G 可以简化为一个子群 H, 当且仅当在 P 中存在一个其和乐群恰好是 H

的联络意味着单凭和乐群自身不能比用拓扑方法给出任何其他更多的信息. 然而, 若与其他条件 (比如无挠线性联络) 相结合, 则和乐群是相当重要的.

3. 陈省身 [3] 在可微流形 M 上定义了 G 结构的概念, 其中 G 是 $GL(n;\mathbf{R})$ $(n=\dim M)$ 的某个 Lie 子群. 按我们的术语来说, M 上的 G 结构就是线性标架丛对于子群 G 的约化. 对于 $G=O(n)$ 而言, 一个 G 结构无非就是在 M 上给定的一个 Riemann 度量 (参看第一章例 5.7). 对于一般 G 结构理论可以参看陈省身 [3], Bernard [1] 及 Fujimoto [1]. 在这里我们简述若干其他特殊情况.

Weyl [3] 和 E. Cartan [3] 证明了下列结果. 对于 $GL(n;\mathbf{R})$ $(n\geqslant 3)$ 的闭子群 G 来说, 下列两个条件相互等价:

(1) G 是保持某个具有任意符号差的非退化二次型不变的所有矩阵构成的群;

(2) 对于每个 n 维流形 M 和 $L(M)$ 的每个带有结构群 G 的约化子丛 P, 在 P 上均有唯一的一个无挠联络.

从第四章的定理 2.2 (其中的 g 可以是不定 Riemann 度量), 蕴涵关系 (1)→(2) 是明显的. 实际上, 若 G 是这样一个群, 那么按类似于第一章例 5.7 的方式, M 上的任何 G 结构对应于 M 上的不定 Riemann 度量. 蕴涵关系 (2)→(1) 是非平凡的. 也可以参看 Klingenberg[1].

令 G 是使 $\mathbf{R}^n$ 的 r 维子空间 $\boldsymbol{R}^r$ 保持不变的所有矩阵组成的 $GL(n;\boldsymbol{R})$ 的子群. n 维流形 M 上的 G 结构无非就是一个 r 维分布. Walker [3] 证明了一个 r 维分布关于某个无挠线性联络是平行的, 当且仅当该分布是可积的. 也可参看 Willmore [1, 2].

令 G 是 $GL(n;\boldsymbol{C})$, 则自然可以看作 $GL(2n;\boldsymbol{R})$ 的子群. 那么 $2n$ 维流形 M 上的 G 结构无非就是 M 上的殆复结构. 这个结果将在第二卷中论述.

4. 局部和乐群和无穷小和乐群的概念是由 Nijenhuis [2] 系统引进的. 第二章 2.10 节的结果是他在线性联络的情况下得到的 (第三章 3.9 节). 正如第二章 2.10 节中所描述的那样. Nijenhuis 的结果被 Ozeki [1] 推广到一般情况. 也可参看 Nijenhuis [3]. Chevalley 也在线性联络的情况下得到了第二章的推论 10.7(未发表) 而且他的结果被 Nomizu [2] 所使用, Nomizu 讨论了齐性空间上的不变线性联络. 他的结果被 Wang (王宪钟)[1] 推广成第二章 2.11 节中的情况.

5. 利用联络可以定义任何主纤维丛的示性类. 这将在第二卷中予以论述. 参看陈省身 [2]、H. Cartan [2, 3]. 在这里, 我们将叙述 Narasimhan 和 Ramanan[1] 的一个结果, 它与万有丛的概念密切相关 (参看 Steenrod [1; p. 101]).

定理 给定一个紧 Lie 群 G 和一个正整数 n, 则存在主纤维丛 $E(N,G)$ 和 E 上的联络 Γ_0 使得任何主丛 $P(M,G)$ $(\dim M\leqslant n)$ 上的任何联络 Γ 可以作为 Γ_0 在从 P 到 E 的某个同态下的逆象而得到 (即 $\omega=f^*\omega_0$, 其中 ω 和 ω_0 分别是 Γ 和 Γ_0 的联络形式, 见第二章命题 6.2).

因此联络 Γ_0 称为 G(和 n) 的万有联络. 例如带有结构群 $O(k)$ 的 Stiefel 流形上的标准联络是 $O(k)$ 的万有联络. 关于 Stiefel 流形上的标准联络还可以参看 Kobayashi [5], 他对嵌入 Euclid 空间内的流形上的 Riemann 联络给出了一种解释 (参见第二卷).

6. Berger [1] 详细地研究了线性联络和 Riemann 联络的和乐群. 通过仔细考查曲率张量, 他得到一份群的名单, 其中的群可以是带有非平行曲率张量的不可约 Riemann 流形的限制和乐群. 他的这份名单与可迁作用于球面上的连通正交群的目录一致. Simons [1] 直接证明了具有非平行曲率张量的不可约 Riemann 流形的线性和乐群在切空间的单位球面上是可迁的. 参见注释 7(对称空间).

7. 许多作者都论述了 Riemann 流形的局部分解 (第四章命题 5.2). 整体分解 (第四章定理 6.2) 是由 de Rham [1] 证明的. Walker [2] 也论述过同一问题. Reinhart [1], Nagano [2] 和 Hermann [1] 均研究过比直积更一般的情况.

值得注意的是, 甚至连局部分解也是一个很强的度量性质. Ozeki 给出一个具有下列性质的无挠线性联络的例子, 其中的线性和乐群是完全可约的 (即切空间是不可约的不变子空间的直和), 但即使在局部, 线性联络也不是直积. 他的例子如下: 在带有坐标 (x^1, x^2) 的 $\boldsymbol{R}^2$ 上, 取由 Christoffel 符号满足 $\Gamma^1_{11}(x^1, x^2) = x^2$ 并且其他 $\Gamma^i_{jk} = 0$ 而给出的线性联络, 那么和乐群为 $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; a > 0\right\}$.

8. 任意 Riemann 流形的限制线性和乐群一定是正交群的闭子群. Hano 和 Ozeki [1] 给出了这样一种无挠线性联络的例子, 其限制线性和乐群在一般线性群中不是闭的. 正如第五章的例 4.3 所证明的那样, 任意 Riemann 流形的线性和乐群一般不是紧的. 对于紧的平坦 Riemann 流形而言, 其线性和乐群是紧的 (第五章定理 4.2). 最近, Wolf [6] 证明了这个结论对于局部对称的紧 Riemann 流形也成立.

注释 2　完备仿射联络和 Riemann 联络

Hopf 和 Rinow[1] 证明了第四章的定理 4.1((1)、(2)、(3) 的等价性), 定理 4.2 和定理 4.4. 定理 4.2 可以追溯到 Hilbert[1], 他的证明还可以在 E. Cartan 的著作 [8] 中找到. 在第四章的 4.4 节中. 我们遵循 de Rham [1] 的附录. 第四章定理 4.1 的条件 (4), 由 Ehresmann [1, 2] 作为完备性的定义给出.

对于完备仿射联络而言, 每一个点对均可由测地线相连的结论一般不成立. 为了构造出反例, 考虑连通 Lie 群 G 上这样一个仿射联络, 它使得从单位元出发的测地线恰好是 G 的单参数群. 这种联络将在第二卷中研究. 对于我们当前的目的来说, 只需考虑使每个左不变向量场平行的仿射联络即可. 容易看出这种联络的存在性和唯一性. 问题是, G 的每一个元素是否为一个单参数子群的成员? 如果 G 是紧的 (已熟知的条件) 或者 G 是幂零的, 那么答案是肯定的 (参看 Matsushima [1]). 但是对于可解群来说, 结论一般不再成立. Saito[1] 用 G 的 Lie 代数给出了当 G 是单连通的可解群时答案为肯定的一种充分必要条件. Sibuya [1] 则对于某些实的线性代数群研究了这个问题. 即使对于单群, 答案一般也不是肯定的. 例如, 直接计算说明 $SL(2;\mathbf{R})$ 的元素

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (cd - bc = 1)$$

在某个单参数子群中, 当且仅当要么 $a+d>-2$, 要么 $a=d=-1$ 并且 $b=c=0$. 这意味着对于 $SL(2;\mathbf{R})$ 的每一个元素 A, A 或者 $-A$ (也可能二者都) 在一个单参数子群上. 因而上述问题的答案对于 $SL(2;\mathbf{R})$ 是否定的, 但对于 $SL(2;\mathbf{R})$ 模其中心则是肯定的. Smith [1] 还在 2 维流形上构造了一个 Lorentz 度量, 即一个不定 Riemann 度量且使得 (Riemann) 联络是完备的, 但并非每一个点对都能用测地线相连. 然而带有完备仿射联络的连通紧流形的每一个点对是否都能用测地线相连这个问题的答案仍然是未知的.

正如 Auslander 和 Markus [1] 所给出的下列例子说明的那样, 紧流形上的仿射联络未必是完备的. 考虑实直线 $\mathbf{R}^1$ 上由度量 $ds^2 = e^x dx^2$ 定义的 Riemann 联络, 其中 x 是 $\mathbf{R}^1$ 上的自然坐标系. 这个联络是平坦的, 但不是完备的, 因为从 $x=0$ 到 $x=-\infty$ 的测地线的长度等于 2. 平移 $x \to x+1$ 是一个仿射变换, 因为它把度量 $e^x dx^2$ 变成 $ee^x dx^2$. 因而实直线模 1(即圆周) 有一个非完备的平坦仿射联络. 这就提供了一个非完备的紧的齐性仿射连通流形. 单连通紧流形上的非完备仿射联络的例子可以如下得到: 在球面的赤道上定义上面的仿射联络, 然后再把它扩张到

整个球面上使得赤道是一条测地线.

人们已经知道, 每个可度量化的空间容许有一个 (与拓扑相容的) 完备一致构造 (Dieudonné [1]). Nomizu 和 Ozeki [1] 证明了: 在流形 M 上给定一个 Riemann 度量 g, 则存在 M 上的一个正函数 f 使得 $f \cdot g$ 是一个完备 Riemann 度量.

注释 3　Ricci 张量和纯量曲率

类似于 Schur 定理 (第五章定理 2.2), 我们有下列经典结果.

定理 1　令 M 是一个连通的 Riemann 流形并且具有度量张量 g 和 Ricci 张量 S. 如果 $S=\lambda g$, 其中 λ 是 M 上的函数, 假若 $n=\dim M\geqslant 3$, 那么 λ 必定是一个常数.

证明　最简单的证法大概是通过经典的张量运算来证. 令 g_{ij}, R_{ijkl} 和 R_{ij} 分别是度量张量 g, Riemann 曲率张量 R 和 Ricci 张量 S 关于局部坐标系 $x^1,\cdots,x^n$ 的分量. 那么 Bianchi 第二恒等式 (第三章定理 5.3) 可以表示成

$$R_{ijkl;m}+R_{ijlm;k}+R_{ijmk;l}=0.$$

乘以 g^{ik} 和 g^{jl}, 再对 i,j,k,l 求和, 最后利用下列公式

$$R_{ijkl}=-R_{jikl}=-R_{ijlk},\quad \sum_{i,k}g^{ik}R_{ijkl}=R_{jl}=\lambda g_{jl},$$

则可得到

$$(n-2)\lambda_{;m}=0.$$

因此 λ 是一个常数.　证毕.

一个 Riemann 流形, 若 $S=\lambda g$, 且其中 λ 是一个常数, 则将该流形称为 Einstein(爱因斯坦) 流形.

下列命题归功于 Schouten 和 Struik [1].

命题 2　若 M 是一个 3 维 Einstein 流形, 那么它必定是常曲率空间.

证明　令 p 是 $T_x(M)$ 中的任何平面, 令 X_1,X_2,X_3 是 $T_x(M)$ 的一个规范正交基且使得 p 是由 X_1,X_2 张成的。令 p_{ij} 是由 X_i 和 X_j $(i\neq j)$ 张成的平面, 因而 $p_{ij}=p_{ji}$, 那么

$$\begin{aligned}
S(X_1,X_1)&= & &K(p_{12})+ &&K(p_{13})\\
S(X_2,X_2)&= K(p_{21})+ & & &&K(p_{23})\\
S(X_3,X_3)&= K(p_{31})+ & &K(p_{32})
\end{aligned}$$

其中 $K(p_{ij})$ 表示由平面 p_{ij} 决定的截曲率. 从而有

$$S(X_1,X_1)+S(X_2,X_2)-S(X_3,X_3)=2K(p_{12})=2K(p).$$

因为 $S(X_i, X_i) = \lambda$, 故有 $K(p) = \dfrac{1}{2}\lambda$. 证毕.

评注　上面的公式又蕴涵着: 如果 $0 < c < S(X, X) < 2c$ 对所有单位向量 $X \in T_x(M)$ 成立, 那么对 $T_x(M)$ 中的所有平面 p 都有 $K(p) > 0$. 类似地, 若 $2c < S(X, X) < c < 0$ 对所有单位向量 $X \in T_x(M)$ 成立, 则对 $T_x(M)$ 中的所有平面 p 都有 $K(p) < 0$.

回到 $n = \dim M$ 为任意整数的一般情形. 令 $X_1, \cdots, X_n$ 是 $T_x(M)$ 的规范正交基. 那么 $S(X_1, X_1) + \cdots + S(X_n, X_n)$ 不依赖于规范正交基的选取并且称之为 x 点的纯量曲率. 利用 S 和 g 的分量 R_{ij} 和 g_{ij}, 则纯量曲率相应地由 $\sum_{i,j} g^{ij} R_{ij}$ 给出.

注释 4　常正曲率空间

令 M 是具有常曲率 $1/a^2$ 的 n 维连通完备 Riemann 流形, 那么由第五章定理 3.2 和第六章定理 7.10, M 的万有覆盖流形等距同构于 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中由 $(x^1)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=a^2$ 给出的半径为 a 的球面 S^n, 即 $M=S^n/G$, 其中 G 是 $O(n+1)$ 的一个有限子群并且自由地作用在 S^n 上.

在 n 为偶数的情况下, 确定这些群 G 特别简单. 令 $\chi(M)$ 表示 M 的 Euler 数, 则有 (参看 Hu(胡世桢)[1; p.227])

$$2=\chi(S^n)=\chi(M)\times(G\text{ 的阶})\quad(\text{若 } n \text{ 为偶数}).$$

因此 G 或者仅由单位元 I 组成, 或者由 I 和 $O(n+1)$ 的另一个使得 $A^2=I$ 的元素 A 组成. 显然 A 的特征值为 ± 1. 因为 A 在 S^n 上不可能有任何不动点, 所以 A 的特征值全都等于 -1. 因而得到

定理 1　每一个具有常曲率 $1/a^2$ 的维数是偶数 n 的连通完备 Riemann 流形 M, 要么等距同构于半径为 a 的球面 S^n, 要么等距同构于实射影空间 $S^n/\{\pm 1\}$.

n 是奇数的情况还没有完全解决. 在这方面的最一般结果归功于 Zassenhaus [2].

定理 2　令 G 是 $O(n+1)$ 的一个自由作用于 S^n 上的有限子群. 那么 G 的任何 pq 阶子群 (其中 p 和 q 均为素数, 但不必相异) 都是循环群.

证明　只要证明若 G 是 pq 阶的, 则 G 必是循环群就行了. 首先考虑 G 是 p^2 阶的情况. 此时, G 或者是循环的, 或者是两个 p 阶循环群 G_1 和 G_2 的直积 (参看 Hall [1; p. 49]). 假设是后一种情形, 则令 A 和 B 分别为 G_1 和 G_2 的生成元. 因为 G 的每一个不等于 I 的元素 T 都是 p 阶的, 所以对于每个 $y\in\mathbf{R}^{n+1}$ 均有

$$T\left(\sum_{i=0}^{p-1}T^iy\right)=\sum_{i=0}^{p-1}T^iy.$$

因为 T 在 S^n 上没有不动点, 所以

$$\sum_{i=0}^{p-1}T^iy=0,\quad y\in\mathbf{R}^{n+1}.$$

通过置 $T=A^iB$ 和 $y=x$, 则得到

$$\sum_{j=0}^{p-1}(A^iB)^jx=0,\quad x\in\mathbf{R}^{n+1},\quad i=0,1,\cdots,p-1,$$

因此

$$0=\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{p-1}(A^iB)^jx=\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{i=0}^{p-1}A^{ij}B^jx,\quad x\in\mathbf{R}^{n+1}.$$

另一方面, 通过置 $T=A^j, y=B^jx$, 则得

$$\sum_{i=0}^{p-1}A^{ij}B^jx=0,\quad x\in\mathbf{R}^{n+1},\quad j=1,2,\cdots,p-1.$$

从而有

$$0=\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{i=0}^{p-1}A^{ij}B^jx=\sum_{i=0}^{p-1}A^0B^0x=px,\quad x\in\mathbf{R}^{n+1},$$

这显然是矛盾的. 所以 G 必然是循环的.

其次, 考虑 $p<q$ 的情况. 在此情况下, G 要么是循环的, 要么是非交换的. 设 G 是非交换的, 令 S 和 A 分别是 p 阶和 q 阶的元素, 则有 (参看 Hall[1, p. 51])

$$SAS^{-1}=A^t,$$

其中 $0<t<q$ 并且 $t^p\equiv 1 \mod q$; 而且 G 的每个元素均能唯一地写成 A^iS^k 的形式, 其中 $0\leqslant i\leqslant q-1$, $0\leqslant k\leqslant p-1$. 对于每个整数 k, 都可由 $f(k)=1+t+t^2+\cdots+t^{k-1}$ 定义一个整数 $f(k)$. 那么有

(a) $f(p)\equiv 0 \mod q$;

(b) 若 $k\equiv 1 \mod p$, 则 $f(k)\equiv 1 \mod q$;

(c) $(A^iS)^k=A^{i\cdot f(k)}S^k$.

实际上, (a) 可从 $t^p\equiv 1 \mod q$ 得出, 而 (c) 从 $SAS^{-1}=A^t$ 得出. 对每个 $i(0\leqslant i\leqslant q-1)$, 令 G_i 是由 A^iS 生成的 G 的循环子群. 因为 $(A^iS)^p=A^{i\cdot f(p)}S^p=I$, 所以 G_i 是 p 阶的. 从而对于 $0\leqslant i,j\leqslant q-1$, 或者 $G_i\cap G_j=\{I\}$, 或者 $G_i=G_j$. 现在证明若 $i\neq j$, 则 $G_i\cap G_j=\{I\}$. 若 $G_i=G_j$, 则存在一个整数 k 使得 $(A^iS)^k=A^jS$. 由 (c) 则有 $A^{i\cdot f(k)}S^k=A^jS$, 从而 $S^k=S$. 这蕴涵着 $k\equiv 1 \mod p$ 和 $f(k)\equiv 1 \mod q$. 从而有 $A^iS^k=A^jS$, 这蕴涵着 $i=j$. 令 N 是由 A 生成的 G 的正规子群. 因为 N 是 q 阶的, 又因 G_i 是 p 阶的, 所以对每个 $i(0\leqslant i\leqslant q-1)$ 都有 $G_i\cap N=\{I\}$. 通过计数 $N,G_0,G_1,\cdots,G_{q-1}$ 的阶数, 即可看出 G 是 N, $G_0-\{I\},G_1-\{I\},\cdots,G_{q-1}-\{I\}$ 的不交并, 因此, 对于 $x\in\mathbf{R}^{n+1}$ 有

$$\sum_{T\in N}Tx+\sum_{T\in G_0}Tx+\cdots+\sum_{T\in G_{q-1}}Tx=\sum_{T\in G}Tx+qx.$$

另一方面, 对每个 $T_0\in N$ 有

$$T_0\left(\sum_{T\in N}Tx\right)=\sum_{T\in N}T_0Tx=\sum_{T\in N}Tx,\quad x\in\mathbf{R}^{n+1}.$$

因为 G 是自由作用于 S^n 上, 所以 $\sum_{T\in N} Tx = 0$. 同理 $\sum_{T\in G_i} Tx = 0 (i = 0, 1, \cdots, q-1)$, $\sum_{T\in G} Tx = 0$. 从而对每个 $x \in \mathbf{R}^{n+1}$ 均有 $qx = 0$, 这显然是矛盾的. 证毕.

最近, Wolf [1] 对具有常曲率 $1/a^2$ 的齐性 Riemann 流形进行了分类, 其结果可以叙述如下.

定理 3 令 $M = S^n/G$ 是具有常曲率 $1/a^2$ 的齐性 Riemann 流形.

(1) 若 $n+1 = 2m$ (但不能被 4 整除), 那么

$$S^n = \{(z^1, \cdots, z^m) \in \mathbf{C}^m; |z^1|^2 + \cdots + |z^m|^2 = a^2\}.$$

并且 G 是由形如 λI_m 的矩阵构成的有限群, 其中 $\lambda \in \boldsymbol{C}^m$ 且满足 $|\lambda| = 1$, 而 I_m 是 $m \times m$ 阶单位矩阵.

(2) 若 $n+1 = 4m$, 那么

$$S^n = \{(q^1, \cdots, q^m) \in \boldsymbol{Q}^m; |q^1|^2 + \cdots + |q^m|^2 = a^2\},$$

(其中 $\boldsymbol{Q}$ 是四元数域), 而且 G 是由形如 ρI_m 的矩阵构成的有限群, 其中 $\rho \in \boldsymbol{Q}$ 且满足 $|\rho| = 1$.

反过来, 若 G 是 (1) 或 (2) 所述类型的有限群, 则 $M = S^n/G$ 是齐性的.

鉴于定理 1, 我们无需考虑 n 为偶数的情况.

对椭圆型空间 (即常正曲率空间) 的分类问题感兴趣的读者可以查阅下列文献: Vincent [1], Wolf [5]; 对于 $n = 3$, 则有 H. Hopf [1] 及 Seifert 和 Threlfall [1]. Milnor [1] 把定理 2 部分推广到 G 是自由作用在 S^n 上的同胚群的情形. Calabi 和 Markus[1] 及 Wolf [3, 4] 研究了具有常正曲率的 Lorentz 流形. 也可以参看 Helgason [1]. 对于被齐性 Riemann 流形覆盖的空间的研究, 可以参看 Wolf [2].

注释 5　平坦 Riemann 流形

令 $M = \mathbf{R}^n/G$ 是一个紧平坦 Riemann 流形, 其中 G 是 $\mathbf{R}^n$ 的 Euclid 运动群的一个离散子群. 令 N 是 G 的由纯平移组成的子群. 那么

(1) N 是 G 的 Abel 正规子群并且关于 n 个生成元是自由的;

(2) N 是 G 的最大 Abel 子群;

(3) G/N 是有限的;

(4) G 没有有限子群.

实际上, (1) 和 (3) 在第五章定理 4.2 的 (4) 中已经证明. 为证明 (2), 令 K 是 G 的任何包含 N 的 Abel 子群. 因为由 (2), G/K 也是有限的, 所以 $\mathbf{R}^n/K$ 是一个紧平坦 Riemann 流形. 因为 K 是 K 的 Abel 正规子群, 所以由第五章定理 4.2 的引理 6, K 只包含平移. 从而 $K = N$. 最后, (4) 可从 G 自由作用在 $\mathbf{R}^n$ 上这一事实得出. 事实上, 任何有限的 Euclid 运动群都有不动点 (参看第四章定理 7.1 的证明), 因而 G 没有有限子群.

Auslander 和 Kuranishi [1] 证明了下列的逆命题.

令群 G 带有一个子群 N 并且满足上面的条件 (1), (2), (3), (4). 那么 G 就可以看作 $\mathbf{R}^n$ 的 Euclid 运动群并且使得 $\mathbf{R}^n/G$ 是一个紧平坦 Riemann 流形.

令 $\mathbf{R}^n/G$ 和 $\mathbf{R}^n/G'$ 是两个紧平坦 Riemann 流形. 如果存在一个仿射变换 φ 使得 $\varphi G\varphi^{-1} = G'$, 即 G 和 G' 关于 $\mathbf{R}^n$ 的仿射变换群是共轭的, 则称 $\mathbf{R}^n/G$ 和 $\mathbf{R}^n/G'$ 是等价的. 除了第五章定理 4.2 的 (4) 之外, Bieberbach [1] 还得到下列结果:

(a) 如果 G 和 G' 作为抽象群是同构的, 那么 $\mathbf{R}^n/G$ 和 $\mathbf{R}^n/G'$ 是等价的.

(b) 对于每个 n, 只有有限个紧平坦 Riemann 流形 $\mathbf{R}^n/G$ 的等价类.

在这里我们只略述证明的概要. 用 (A, p) 表示 $\mathbf{R}^n$ 的具有线性部分 A 和平移部分 p 的仿射变换. 令 N 是由纯平移组成的 G 的子群. 令 $(I, t_1), \cdots, (I, t_n)$ 为 N 的基, 其中 I 是单位矩阵且 $t_i \in \mathbf{R}^n$. 因为 $(A,p)(I,t_i)(A,p)^{-1} = (I, At_i) \in N$ 对任何 $(A,p) \in G$ 成立, 因而可以写成 $At_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_i^j t_j$, 其中每个 a_i^j 均为整数. 令 T 是一个 $n \times n$ 矩阵, 它的第 i 列由 t_i 给出, 即 $T = (t_1, \cdots, t_n)$. 那么 $(a_i^j) = T^{-1}AT$ 为幺模矩阵 (若一个矩阵连同其逆矩阵都是非奇异的整数矩阵, 则称之为幺模矩阵).

为证明 (a), 令 $(A', p') \in G'$ 是通过同构 $G' \approx G$ 与 $(A, p) \in G$ 对应的元素. 令 N' 是在同构 $G' \approx G$ 之下与 N 对应的 G' 的子群. 那么 N' 是 G' 的正规子群而且

是 G' 的最大 Abel 子群, 因此 N' 是由纯平移组成的 G' 的子群. 令 (I, t'_i) 对应于 (I, t_i). 因为 $(A', p')(I, t'_i)(A', p')^{-1} = (I, A't'_i)$, 所以 $(I, A't'_i)$ 对应于 (I, At_i). 从而有 $A't'_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j t'_j$. 换句话说, 若置 $T' = (t'_1, \cdots, t'_n)$, 那么 $T'^{-1}A'T' = T^{-1}AT$. 置

$$G^* = \{(T^{-1}AT, \quad T^{-1}p - T'^{-1}p'); (A, p) \in G\}.$$

那么 G^* 是一个不包含任何纯平移的群. 因此是有限的. 令 $u \in \boldsymbol{R}^n$ 是在 G^* 作用下的不动点. 那么对所有 $(A, p) \in G$,

$$(T, Tu)^{-1}(A, p)(T, Tu) = (T', 0)^{-1}(A', p')(T, 0).$$

这就完成了 (a) 的证明.

为了证明 (b), 只需证明仅有有限个互不同构的群 G 使得 $\boldsymbol{R}^n/G$ 为紧平坦 Riemann 流形. 每个 G 决定一个群扩张

$$0 \to N \to G \to K \to 1,$$

其中, 当把 N 看作 $\mathbf{R}^n$ 的子群时, 有限群 $K = G/N$ 线性地作用于 N 上. 给定这样一个有限群 K, 则群扩张 $0 \to N \to G \to K \to 1$ 的集合由 $H^2(K, N)$ 给出. 因为 K 是有限的并且 N 是有限生成的, 所以 $H^2(K, N)$ 是有限的. 正如我们在 (a) 的证明中所看到的那样, 如果把 N 与 $\mathbf{R}^n$ 的整数格点等同, 那么 $K = G/N$ 由幺模矩阵给出. 令 K 和 K' 是两个由 n 阶幺模矩阵组成的有限群并且它们在所有幺模矩阵组成的群 $GL(n; \boldsymbol{Z})$ 中是共轭的, 因而 $SKS^{-1} = K'$ 对某个 $S \in GL(n; \boldsymbol{Z})$ 成立. 将 $t \in N$ 映为 $St \in N$ 的映射是 N 的一个自同构. 从而 S 诱导一个同构 $H^2(K, N) \approx H^2(K', N)$, 而且若 $0 \to N \to G' \to K' \to 1$ 是 $H^2(K', N)$ 一个元素并且对应于 $H^2(K, N)$ 的元素 $0 \to N \to G \to K \to 1$, 则 G 与 G' 是同构的. 因而我们的问题就归结为下列 Jordan 定理:

$GL(n; \boldsymbol{Z})$ 的有限子群只有有限个共轭类.

Jordan 的这个定理从 Minkowski-Siegel 理论得出. 令 H_n 是由所有 n 阶实对称正定矩阵组成的空间. 那么 $GL(n; \boldsymbol{Z})$ 真不连续地作用在 H_n 上如下:

$$X \to^t S \times S, \quad X \in H_n, S \in GL(n; \boldsymbol{Z}).$$

令 R 是由 Minkowski 意义下的约化矩阵组成的 H_n 的子集. 将 ${}^tS \times S$ 记为 $S[X]$. 那么

(i) $\bigcup_{S \in GL(n; \boldsymbol{Z})} S[R] = H_n$;

(ii) 由 $F = \{S \in GL(n; \boldsymbol{Z}); S[R] \cap R$ 为非空集$\}$定义的集合 F 是一个有限集.

R 的第一个性质蕴涵着 $GL(n;\boldsymbol{Z})$ 的任何有限子群 K 都共轭于 $GL(n;\boldsymbol{Z})$ 的一个包含在 F 中的子群. 实际上, 令 $X_0 \in H_n$ 是 K 的一个不动点 (例如, 置 $X_0 = \sum_{A\in K} {}^tAA$). 令 $S \in GL(n;\boldsymbol{Z})$ 使得 $S[X_0] \in \mathbf{R}$. 那么 $S^{-1}KS \subset F$. 因为 F 是有限的, 所以只有有限个 $GL(n;\boldsymbol{Z})$ 的有限子群的共轭类.　证毕.

作为参考资料, 我们指出 Minkowski[1], Bieberbach[2], Bieberbach 和 Schur[1] 及 Siegel[1].

注意到 (a) 蕴涵着两个紧平坦 Riemann 流形等价当且仅当它们是相互同胚的. 虽然 (b) 对于非紧的平坦 Riemann 流形并不成立, 但是在每一维数下, 完备的平坦 Riemann 流形只有有限个同胚类 (Bieberbach [3]).

对于 3 维完备平坦 Riemann 流形的分类. 见 Hantzche 和 Wendt [1] 及 Nowacki [1].

平坦 Riemann 流形的大多数结果不能被推广到平坦仿射联络, 例如, 可以参看 Auslander [1].

注释 6　曲率的平移

令 M 和 M' 都是 Riemann 流形而 $\varphi: M \to M'$ 是一个保持曲率张量场的微分同胚. 一般这并不意味着存在从 M 到 M' 的等距映射. 例如令 M 是把单位半球面附加在直圆柱 $S^1 \times [0,1]$ 的两端而得到的紧 Riemann 流形, 其中 S^1 是单位圆周, 然后消去棱角使之变得光滑. 类似地, 令 M' 是把单位半球面附加到直圆柱 $S^1 \times [0,2]$ 的两端而得到的紧 Riemann 流形, 并以同样的方式去掉棱角使之光滑化. 令 $\varphi: M \to M'$ 是一个微分同胚并且诱导附加半球面及其邻域上的等距. 因为 M 和 M' 的柱面部分是平坦的, 所以 φ 保持曲率张量场. 然而, M 和 M' 不能互相等距.

Ambrose [1] 得到的下列结果在 Riemann 流形的情况下推广了第六章的定理 7.4.

令 M 和 M' 是完备的单连通 Riemann 流形, x 是 M 的任意一个固定点, x' 是 M' 的任一固定点. 令 $f: T_x(M) \to T_{x'}(M')$ 是一个固定的正交变换. 令 τ 是 M 上从 x 到一点 y 的简单折测地线, 而 τ' 是 M' 上从 x' 到一点 y' 的相应测地折线. 对应关系是由 f 通过平行移动给出的. 令 p (相应 p') 是 $T_x(M)$ ($T_{x'}(M')$) 中的平面, 而 $q(q')$ 是由 $p(p')$ 经过沿 $\tau(\tau')$ 平移而得到的 $T_y(M)(T_{y'}(M'))$ 中的平面. 假设 p' 在 f 之下对应于 p. 如果对所有简单折测地线 τ 和 $T_x(M)$ 中的所有平面 p, 截曲率 $K(q)$ 等于截曲率 $K'(q')$, 那么存在唯一的等距映射 $F: M \to M'$ 使得它在 x 点的微分与 f 一致.

Hicks [1] 在仿射联络的情况下得到一个类似结果, 该结果推广了第六章的定理 7.4.

注释 7　对称空间

虽然对称空间的理论, 尤其是 Riemann 对称空间的理论, 将在第二卷中详细论述, 但是在这里我们仍将给出它的定义和基本性质.

令 G 是一个具有对合自同构 $\sigma(\sigma^2=1, \sigma\neq 1)$ 的连通 Lie 群. 令 H 是一个闭子群, 而且它位于由 σ 的所有不动点组成的 (闭) 子群与它的单位分支之间. 然后我们将说明 G/H 是 (由 σ 定义的) 对称齐性空间. 用同一字母 σ 表示由 σ 诱导的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构, 则有 $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}+\mathfrak{h}$ (直和), 其中, $\mathfrak{h}=\{X\in\mathfrak{g}; X^\sigma=X\}$ 与对应于 H 的子代数一致而 $\mathfrak{m}=\{X\in\mathfrak{g}; X^\sigma=-X\}$. 显然 $[\mathfrak{h},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$ 且 $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{h}$.

G 的自同构 σ 还诱导 G/H 的一个对合的微分同胚 σ_o 使得 $\sigma_o(\pi x)=\pi(x^\sigma)$ 对一切 $x\in G$ 成立, 其中 π 是 G 到 G/H 上的标准射影. 于是 G/H 的原点 $O=\pi(e)$ 是 σ_o 的一个孤立不动点. 我们将 σ_o 称为以 O 为中心的对称变换.

由第二章定理 11.1, 丛 $G(G/H, H)$ 允许有一个由子空间 $\mathfrak{m}$ 决定的不变联络 Γ. 我们将该联络称为 $G(G/H,H)$ 的标准联络.

定理 1　对于对称空间 G/H 而言, 丛 $G(G/H,H)$ 上的标准联络 Γ 具有下列性质:

(1) Γ 在 G 的自同构 σ (它是 $G(G/H,H)$ 的丛自同构) 作用下是不变的;

(2) 曲率形式 $\Omega(X,Y)=-\left(\dfrac{1}{2}\right)[X,Y]\in\mathfrak{h}$ 给出, 其中 X 和 Y 是属于 $\mathfrak{m}$ 的任意左不变向量场;

(3) 对于任何 $X\in\mathfrak{m}$, 令 $a_t=\exp tX$, 令 $x_t=\pi(a_t)=a_t(O)$. 纤维 H 沿曲线 x_t 的平行移动与左平移 $h\to a_t h (h\in H)$ 一致.

证明　(1) 容易从 $\mathfrak{m}^\sigma=\mathfrak{m}$ 得出. (2) 包含在第二章定理 11.1 中. (3) 可从下列事实得出: 对于任何固定的 $h\in H$, $a_t h$ 是曲线 x_t 的经过 h 点的水平提升.　证毕.

射影 π 给出一个从 Γ 在 e 点的水平子空间 $\mathfrak{m}$ 到原点 O 处的切空间 $T_o(G/H)$ 的线性同构. 若 $h\in H$, 则 $\mathfrak{m}$ 上的 $\mathrm{ad}(h)$ 经过个同构对应于线性迷向变换 $\tilde{h}$, 即由 G/H 的使 O 点固定不动的变换 h 诱导的 $T_o(G/H)$ 的线性变换.

现将 G/H 记为 M, 定义一个从 G 到 M 上的标架丛 $L(M)$ 的映射 f 如下. 令 u_0 是 O 点处的任一固定标架 $X_1,\cdots,X_n$, 可将它等同于 $\mathfrak{m}$ 的某个基. 对任何 $a\in G$, $f(a)$ 是由 X_i 在 a 的微分映射下的象组成的 $a(O)$ 点的标架. 特别, 对于 $h\in H$, $f(h)=h\cdot u_0=u_0\cdot\varphi(h)$, 其中 $\varphi(h)\in GL(n;\boldsymbol{R})$ 是表示由 h 诱导的 $T_o(M)$ 的线性变换关于基 u_0 的矩阵. 容易看出, f 是与从 H 到 $GL(n;\boldsymbol{R})$ 的同态 φ 相对

应的从 G 到 $L(M)$ 的丛同态. 如果 G 在 G/H 上是有效的 (或者等价地, 若 H 不包含 G 的任何非平凡不变子群), 那么 f 和 φ 都是同构.

由第二章命题 6.1, $G(M,H)$ 的标准联络 Γ 在 $L(M)$ 上诱导一个联络. 我们将称之为 G/H 上的标准线性联络并且仍然记为 Γ.

定理 2 对称空间 G/H 上的标准线性联络具有下列性质:

(1) Γ 不仅在关于 O 点的对称变换 σ_o 下不变而且在 G 的作用下也是不变的;

(2) Γ 在 O 点的限制齐次和乐群包含在线性迷向群 $\tilde{H}$ 中;

(3) 对于任何 $X \in \mathfrak{m}$, 令 $a_t = \exp tX$ 且 $x_t = \pi(a_t) = a_t(O)$. 向量沿 x_t 的平移跟由 a_t 产生的变换是相同的. 特别, x_t 是一条测地线;

(4) 挠率张量场为 0;

(5) G/h 上的每一个 G 不变的张量场关于 Γ 是平行的. 特别, 曲率张量场 R 是平行的, 即 $\nabla R = 0$.

证明 (1), (2), (3) 从定理 1 中的相容性得出. (4) 可从 (1) 得出. 因为挠率张量场 T 是在 σ_o 作用下不变的, 所以对于 $T_0(M)$ 中的任何 X 和 Y, 都有 $T(X,Y) = (T(X^{\sigma_o}, Y^{\sigma_o}))^{\sigma_o} = -T(-X,-Y) = -T(X,Y)$, 从而 $T(X,Y) = 0$. 因而在 O 点 $T = 0$, 从而处处有 $T = 0$. (5) 可从 (3) 得出, 实际上, 若 K 是一个 G 不变张量场, 则 $\nabla_{X_0} K = 0$ 对任何 $X_0 \in T_0(M)$ 成立, 因为存在 $X \in \mathfrak{m}$ 使得 (3) 中的 x_t 具有初始向量 X_0. 证毕.

评注 Γ 是 G/H 上唯一具有性质 (1) 的线性联络. 这说明标准线性联络的名称是合理的.

令 G/H 是一个对称空间并且 H 是紧的. 在 G/H 上存在一个 G 不变的 Riemann 度量. 对于任何这样的度量 g, Riemann 联络与 Γ 一致. 实际上, 由 (5), 度量张量场 g 关于 Γ 是平行的. 因为 Γ 的挠率为 0, 所以由唯一性 (第二章定理 2.2) 它是 Riemann 联络.

例 在 $G = SO(n+1)$ 中令 σ 是对合自同构 $A \in SO(n+1) \to SAS^{-1} \in SO(n+1)$, 其中 S 是形如 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ 的矩阵且 I_n 是 n 阶单位矩阵. σ 的不动点构成的子群 H 的单位分支 H^0 是由所有形如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的矩阵组成的, 其中 $B \in SO(n)$. 按照这种理解. 可以将 H^0 写成 $SO(n)$. 对称齐性空间 $SO(n+1)/SO(n)$ 自然微分同胚于 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的单位球面 S^n. 实际上, 可令 $e_0, e_1, \cdots, e_n$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的标准规范正交基. 映射 $A \in SO(n+1) \to Ae_0 \in S^n$ 诱导从 $SO(n+1)/SO(n)$ 到 S^n 上的一个微分同胚. 向量组 $Ae_1, \cdots, Ae_n$ 可以看作是 S^n 的 Ae_0 点处的一个规范正交标架. 这就给出从 $SO(n+1)/SO(n)$ 上的从 $SO(n+1)$ 到 S^n 上的规范正交标架丛的一个丛同构. $SO(n+1)/SO(n)$ 上的标准线性联络与 S^n 关于它作为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的嵌入

子流形的 Riemann 度量的 Riemann 联络一致.

可微流形 M 上的一个仿射联络 Γ 称为在点 $x \in M$ 是局部对称的, 如果在 x 的一个开邻域 U 上存在一个对合仿射变换而且它以 x 作为一个孤立不动点. x 点的这种局部对称如果存在, 则它对于以 x 为原点的任何法坐标系必然具有 $(x^i) \to (-x^i)$ 的形式, 因为它诱导 $T_x(M)$ 中的线性变换 $X \to -X$. 如果 Γ 在 M 的每一点 x 处都是局部对称的, 则称 Γ 是局部对称的.

定理 3　M 上的线性联络 Γ 是局部对称的当且仅当 $T = 0$ 和 $\nabla R = 0$.

证明　如果 Γ 是局部对称的, 那么满足 $r + s$ 为奇数且在 x 点的局部对称变换下不变的任何 (r, s) 型张量场在 x 点为 0. 因而在 M 上, $T = 0$ 且 $\nabla R = 0$. 其逆可从第六章定理 7.4 得出.　证毕.

定理 4　令 Γ 是 M 上的一个局部对称的线性联络. 若 M 是连通、单连通且完备的, 那么所有仿射变换构成的群 $\mathfrak{A}(M)$ 在 M 上是可迁的. 令 $G = \mathfrak{A}^0(M)$, 那么 $M = G/H$ 是一个对称空间并且 Γ 是该空间的标准线性联络.

证明　第一个论断从第六章的推论 7.9 得出. 令 σ_0 在 M 的一点 O 处是局部对称的. 由推论 6.2. σ_O 能够扩张成 M 到其自身的仿射变换而且是对合的. 由 $a^\sigma = \sigma_o \cdot a \cdot \sigma_o$ 定义 G 的一个对合的自同构. 那么 H 位于由 σ 的所有不动元组成的子群和它的单位分支之间.　证毕.

定理 3 和定理 4 的 Riemann 版本是明显的.

Cartan [7] 引进并广泛地研究了 Riemann 对称空间. 关于对称的 G/H 上的标准线性联络可参看 Nomizu [2] 和 Kobayashi [3]. Nomizu [4, 6] 证明了定理 2(2) 的逆: 如果完备 Riemann 流形 M 的限制线性和乐群包含在每一点的线性迷向群中, 那么 M 是局部对称的. Simons [1] 也有一个类似的定理.

Nomizu 和 Ozeki [3] 证明了: 对于任何完备 Riemann 流形 M, $\nabla^m R = 0$ 对某个 $m > 1$ 成立的条件蕴涵着 $\nabla R = 0$. (当 M 为紧流形时, 这已为 Lichnerowicz [3; p. 4] 所知.) 后来他们又指出完备性的假设不是必要的.

注释 8　具有循环曲率的线性联络

令 M 是一个带有线性联络 Γ 的 n 维流形. 对于 M 上的一个 (r,s) 型非零张量场 K. 如果存在 1 形式 α 使得 $\nabla K = K \otimes \alpha$, 则称 K 是循环的. 下列结果归功于 Wang(王宪钟)[1].

定理 1　按照第三章 3.5 节的记号, 令 $f: L(M) \to \boldsymbol{T}^r_s(\mathbf{R}^n)$ 是与给定的 (r,s) 型张量场 K 对应的映射. 那么 K 是循环的当且仅当对经过任何 $u_0 \in L(M)$ 的和乐丛 $P(u_0)$ 存在一个在 $P(u_0)$ 上没有零点的可微函数 $\varphi(u)$ 使得

$$f(u) = \varphi(u) \cdot f(u_0), \quad u \in P(u_0).$$

作为一种特殊情况, K 是平行的当且仅当 $f(u)$ 在 $P(u_0)$ 上是常函数.

利用这一结果及和乐定理 (第二章定理 8.1), 王宪钟又得到

定理 2　令 Γ 是 M 上带有循环曲率张量 R 的线性联络. 那么它的线性和乐群 $\Psi(u_0)$ 的 Lie 代数是由形如 $\Omega_{u_0}(X,Y)$ 的所有元素张成的, 其中 Ω 是曲率形式而 X 和 Y 是 u_0 点的水平向量特别, 有

$$\dim \Psi(u_0) \leqslant \frac{1}{2}n(n-1).$$

作为定理 1 的应用, 我们将概述下列定理的证明.

定理 3　对一个具有循环曲率张量的 Riemann 流形 M, 并且其限制线性和乐群是不可约的, 那么若 $\dim M \geqslant 3$, 则其曲率张量必定是平行的.

证明　令 R^i_{jkl} 是 $O(M)$上对应于曲率张量场 R 的 $\boldsymbol{T}^1_3(\mathbf{R}^n)$ 值函数的分量. 把定理 1 应用于 R. 因为 $\sum\limits_{i,j,k,l}(R^i_{jkl})^2$ 在 $O(M)$ 的每一条纤维上为常数, 所以 φ^2 在 $P(u_0)$ 的每条纤维上为常数. 因为 φ 在 $P(u_0)$ 上恒不为零, 所以它要么恒为正值, 要么恒为负值. 因此 φ 自身在 $P(u_0)$ 的每条纤维上为常数. 令 λ 是 M 上由 $\lambda(x) = 1/\varphi(u)$ 定义的函数, 其中 $x = \pi(u) \in M$. 那么 λR 是一个平行张量场. 若以 S 表示 Ricci 张量场, 那么 λS 也是平行的. M 的不可约性蕴涵着 $\lambda S = c \cdot g$, 其中 c 是一个常数而 g 是度量张量 (参看附录 5 的定理 1). 如果 $\dim M \geqslant 3$ 且 Ricci 张量 S 是非平凡的, 那么由注释 3 的定理 1 可知 λ 是一个常函数. 因为 λR 是平行的, 又因 λ 为常数, 所以 R 是平行的.

其次, 考虑 Ricci 张量 S 恒为零的情况. 令 $\nabla R = R \otimes \alpha$, 令 R^i_{jkl} 和 α_m 分别是 R 和 α 关于局部坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 的分量. 由 Bianchi 第二恒等式 (第三章定

理 5.3, 也可参看注释 3), 有

$$R^i_{jkl}\alpha_m + R^i_{jlm}\alpha_k + R^i_{jmk}\alpha_l = 0.$$

乘以 g^{jm} 再对 j 和 m 求和. 因为 Ricci 张量恒为零, 所以有 $\sum_{j,m} g^{jm} R^i_{jlm} = \sum_{j,m} g^{jm} R^i_{jmk} = 0$. 从而

$$\sum_j R^i_{jkl}\alpha^j = 0, \quad 其中\ \alpha^j = \sum_m g^{jm}\alpha_m.$$

这个等式包含下列几何意义. 令 x 是 M 的任意一个固定点, 而 X 和 Y 是 x 点处的任何向量. 若用 V 表示 x 点处具有分量 $\alpha^j(x)$ 的向量, 那么线性变换 $R(X,Y): T_x(M) \to T_x(M)$ 把 V 映射成零向量. 另一方面, 由和乐定理 (第二章定理 8.1) 和本注释的定理 1(也可参看王宪钟 [1]), 线性和乐群 $\Psi(x)$ 的 Lie 代数是由 $R(X,Y)(X, Y \in T_x(M))$ 给出的 $T_x(M)$ 的所有自同态的集合张成的. 由此可知, V 经 $\Psi(x)$ 作用不变, 因而由 $\Psi(x)$ 的不可约性, 它为零. 所以 ∇R 在 x 点为零. 又因为 x 是 M 的任意点, 所以 R 是平行的.　证毕.

另一方面, 第一个 2 维非平坦 Riemann 流形, 若其截曲率处处不为零, 则它具有循环曲率.

推论　如果 M 是一个具有循环曲率张量的完备 Riemann 流形, 那么 M 的万有覆盖流形 $\tilde{M}$ 或者是一个对称空间, 或者是 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^{n-2}$ 与一个 2 维 Riemann 流形的直积.

证明　使用 deRham 分解定理 (第四章定理 6.2) 和上面的定理 3 以及下列容易验证的事实. 令 M 和 M' 是带有线性联络的流形; 令 R 和 R' 分别是它们的曲率张量. 若 $M \times M'$ 的曲率张量是循环的, 那么只有下列三种可能: (1) $\nabla R = 0$ 且 $\nabla R' = 0$; (2) $R = 0$ 且 $\nabla R' \neq 0$; (3) $\nabla R \neq 0$ 且 $R' = 0$. (也可以参看 Walker [1].)　证毕.

注释 9 几何结构的自同构群

给定一个微分流形 M, M 的所有可微变换组成的群是一个非常庞大的群. 然而使 M 保持某种几何结构不变的可微变换群常常是一个 Lie 群. 关于这种性质的第一个结果是由 H. Cartan [1] 给出的. 他证明了 $\boldsymbol{C}^n$ 中一个有界域的所有复解析变换构成的群是一个 Lie 群. Myers 和 Steenrod [1] 证明了一个 Riemann 流形的所有等距变换组成的群是一个 Lie 群. Bochner 和 Montgomery [1, 2] 证明了一个紧复流形的所有复解析变换构成的群是一个复 Lie 群, 他们使用了一个关于局部紧可微变换群的一般定理, 现在人们知道这个定理对于第一章定理 4.6 的形式也是正确的. 仿射连通流形的所有仿射变换组成的群是 Lie 群, 这个定理首先由 Nomizu 在完备性的假设下予以证明; 这个假设条件后来被 Hano 和 Morimoto [1] 去掉了. Kobayashi [1, 6] 证明了绝对平行的所有自同构组成的群通过把它嵌入到流形中而成为一个 Lie 群. 这种方法可以应用于仿射连通流形 M 的标架丛 $L(M)$ 的绝对平行性 (参见第三章命题 2.6 和第六章定理 1.5).

关于复结构和 Kähler 结构的自同构将在第二卷中讨论.

Palais [1] 研究了 Lie 变换群的整体理论. 在这里叙述一个与我们相关的定理. 令 G 是作用在可微流形 M 上的某个可微变换群. 令 $\mathfrak{g}'$ 是 M 上所有向量场 X 的集合, 它生成一个属于给定群 G 的整体单参数变换群. 令 $\mathfrak{g}$ 是由 $\mathfrak{g}'$ 生成的 Lie 代数 $\mathfrak{X}(M)$ 的一个 Lie 子代数.

定理 如果 $\mathfrak{g}$ 是有限维的, 那么 G 允许有一个 Lie 群结构 (使得映射 $G\times M \to M$ 是可微的) 并且 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$, G 的 Lie 代数自然同构于 $\mathfrak{g}$.

关于这个结果我们有下列应用. 如果 G 是仿射连通流形 (相应地 Riemann 流形)M 的所有仿射变换 (等距变换) 组成的群, 那么 $\mathfrak{g}'$ 是所有无穷小仿射变换 (无穷小等距变换) 的集合, 它们都是整体可积的 (请注意, 若 M 是完备的, 那么由第六章定理 2.4, 这些无穷小变换总是整体可积的). 根据第六章定理 2.3(相应地是定理 3.3) 可知 $\mathfrak{g}$ 是有限维的. 由上面的定理, G 是一个 Lie 群.

Nomizu [8, 9] 详细地研究了 Riemann 流形 M 的所有无穷小等距变换构成的 Lie 代数 $\mathfrak{i}(M)$. 在 M 的每一点 x, 某个 Lie 代数 $\mathfrak{i}(M)$ 是由曲率张量场及其协变微分构造的. 如果 M 是单连通的并且连同度量一起都是解析的, 那么 $\mathfrak{i}(M)$ 自然同构于 $\mathfrak{i}(x)$, 其中 x 是任意一点.

注释 10 具有极大维数的等距变换群和仿射变换群

第六章的定理 3.3 证明了 n维连通 Riemann 流形 M 的等距变换群 $\mathfrak{I}(M)$ 至多是 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 维的, 而且若 $\dim\mathfrak{I}(M)=\frac{1}{2}n(n+1)$, 则 M 是常曲率空间. 我们将概述下列定理的证明.

定理 1 令 M 是一个 n 维连通 Riemann 流形. 若 $\dim\mathfrak{I}(M)=\frac{1}{2}n(n+1)$, 那么 M 等距同构于下列常曲率空间之一:

(a) n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$;

(b) n 维球面 S^n;

(c) n 维实射影空间 $S^n/\{\pm I\}$;

(d) n 维单连通双曲空间.

证明 从第六章定理 3.3 的证明看出 M 是齐性的从而是完备的. M 的万有覆盖空间 $\tilde{M}$ 等距同构于上面的 (a), (b), (d) 之一 (参看第六章定理 7.10). M 的每个无穷小等距变换 X 诱导 $\tilde{M}$ 的一个无穷小等距 $\tilde{X}$. 因此 $\frac{1}{2}n(n+1)=\dim\mathfrak{I}(M)\leqslant\dim\mathfrak{I}(\tilde{M})\leqslant\frac{1}{2}n(n+1)$, 这蕴涵着 $\tilde{M}$ 的每个无穷小等距变换 $\tilde{X}$ 都是由 M 的一个无穷小等距 X 诱导的. 如果写成 $M=\tilde{M}/\Gamma$. 其中 Γ 是 $\mathfrak{I}(\tilde{M})$ 的一个离散子群, 那么 Γ 必然与 $\mathfrak{I}(\tilde{M})$ 的单位分支 $\mathfrak{I}^0(M)$ 交换. 若 $\tilde{M}=\mathbf{R}^n$, 那么 $\mathfrak{I}^0(\tilde{M})$ 是固有运动群而且只有恒等变换与 $\mathfrak{I}^0(\tilde{M})$ 交换; 若 $\tilde{M}=S^n$, 那么 $\mathfrak{I}^0(\tilde{M})=SO(n+1)$ 而且只有 $\pm I$ 与 $SO(n+1)$ 交换; 若 $\tilde{M}$ 是一个单连通的双曲空间, 那么 $\mathfrak{I}(\tilde{M})=O(1,n)$ 而且单位元是 $\mathfrak{I}(\tilde{M})$ 的唯一能与 $\mathfrak{I}^0(\tilde{M})$ 交换的元素. 因而在曲率为非正的情况下, M 是单连通的. 如果 $\tilde{M}$ 与球面 S^n 等距, 那么对于任何对径点 x 和 x' 都存在一个仅在两点 x 和 x' 为零的无穷小等距变换 $\tilde{X}$. 这就蕴涵着 $M=S^n$ 或者 $M=S^n/\{\pm I\}$. 容易看出若 M 与射影空间 $S^n/\{\pm I\}$ 等距, 那么 $I(M)$ 同构于 $O(n+1)$ 模其中心, 从而是 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 维的. 证毕.

第六章定理 2.3 证明了具有仿射联络的 n 维连通流形 M 的仿射变换群 $\mathfrak{A}(M)$ 至多是 n^2+n 维的, 并且若 $\dim\mathfrak{A}(M)=n^2+n$, 则联络是平坦的. 现在来证明下列定理.

定理 2 如果 $\dim\mathfrak{A}(M)=n^2+n$, 那么 M 是具有自然平坦仿射联络的通常仿射空间.

证明 $\mathfrak{A}(M)$ 的每个元素诱导 $L(M)$ 的一个保持标准形式和联络形式不变的变换 (参看第六章 6.1 节). 从 $\mathfrak{A}(M)$ 自由作用在 $L(M)$ 的事实和 $\dim \mathfrak{A}(M) = n^2 + n = \dim L(M)$ 的假设可知, $\mathfrak{A}(M)$ 在 $L(M)$ 的每一个连通分支上是可迁的. 这蕴涵着 $L(M)$ 上的每个标准水平向量场都是完备的; 其证明类似于第六章定理 2.4 的证明. 换句话说, 联络是完备的. 由第五章定理 4.2 或者第六章定理 7.8, M 的万有覆盖空间 $\tilde{M}$ 就是平常的仿射空间. 最后, $\tilde{M} = M$ 的事实可以用跟上面定理 1 同样的方式来证明. 证毕.

第六章的定理 2.3 和 3.3 都是经典的 (例如可以参看 Eisenhart [1]).

容许有非常庞大的自同构群的 Riemann 流形和仿射联络曾经被 Egorov, 王宪钟, Yano 和其他一些数学家研究过. 读者可在 Yano [2] 这部著作中找到有关这个问题的参考资料.

注释 11 Riemann 流形的保形变换

令 M 是一个带有度量张量 g 的 Riemann 流形. M 上的变换 φ, 若满足 $\varphi^*g = \rho g$, 其中 ρ 是 M 上的正值函数, 则称 φ 是保形变换. 若 ρ 是常函数, 则 φ 是相似变换; 若 ρ 恒等于 1, 则 φ 为等距变换. 如果 M 上的无穷小变换 X 满足 $L_X g = \sigma g$, 其中 σ 为 M 上的函数, 则将 X 称为无穷小保形变换; 若 σ 是常函数, 则 X 是无穷小相似变换; 若 $\sigma = 1$, 则它是无穷小等距变换. 由无穷小变换 X 生成的局部单参数变换群是保形的当且仅当 X 是保形的.

定理 1 假若 $n \geqslant 3$, 那么 n 维连通 Riemann 流形 M 的保形变换群至多是 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 维的 Lie 变换群.

本定理可以沿着下列思路予以证明. $L_X g = \sigma g$ 的可积性条件蕴涵着由无穷小保形变换 X 构成的 Lie 代数至多是 $\frac{1}{2}(n+1)\cdot(n+2)$维的 (例如可以参看 Eisenhart [1; p. 285]). 由注释 9 中所引用的 Palais 定理, 保形变换群是 Lie 变换群.

第六章 6.3 节证明了对几乎所有的 Riemann 流形 M 来说, M 的最大连通仿射变换群 $\mathfrak{A}^0(M)$ 与 M 的最大连通等距变换群 $\mathfrak{I}^0(M)$ 是一致的. 对于 M 的最大连通保形变换群 $\mathfrak{C}^0(M)$, 在同一方向上有下列几个结果.

定理 2 令 M 是一个 n 维连通 Riemann 流形且使得 $\mathfrak{C}^0(M) \neq \mathfrak{I}^0(M)$, 那么

(1) 若 M 是紧的, 则对于 $1 \leqslant p \leqslant n$, 没有长度不变的调和 p 形式 (Goldberg 和 Kobayashi [1]);

(2) 若 M 是紧的和齐性的并且假设 $n > 3$, 那么 M 与球面等距 (Goldberg 和 Kobayashi [2]);

(3) 若 M 是维数 $n \geqslant 3$ 且具有平行 Ricci 张量的完备 Riemann 流形, 则 M 与球面等距 (Nagano [1]);

(4) M 不可能是具有定常非正纯量曲率的紧 Riemann 流形 (Yano [2; p. 279] 和 Lichnerowicz [3; p. 134]).

上述第 (3) 款是对 Nagano 和 Yano [1] 的结果的改进; 他们的结果大意是: 若 M 是一个维数 $\geqslant 3$ 且使得 $\mathfrak{C}^0(M) \neq \mathfrak{I}^0(M)$ 的完备 Einstein 空间, 则 M 与球面等距. Nagano [1] 使用了 Tanaka [1] 的结果.

另一方面, 容易构造出满足条件 $\mathfrak{C}^0(M) \neq \mathfrak{I}^0(M)$ 的 (且不同于球面的)Riemann 流形. 实际上, 令 M 是一个带有度量张量 g 的且容许有一个单参数等距变换群的 Riemann 流形; 令 ρ 是 M 上的一个正值函数并且它不是在这个单参数等距变换

群的作用下不变的. 那么关于新的度量 ρg, 这个群是一个非等距的单参数保形变换群.

为证明对于 n 维球面 $M, \dim\mathfrak{C}^0(M)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$,将 M 嵌入到 $n+1$ 维实射影空间中. 令 $x^0,x^1,\cdots,x^{n+1}$ 是 $n+1$ 维实射影空间 P_{n+1} 的齐次坐标系. 令 M 是由 $(y^1)^2+\cdots+(y^{n+1})^2=1$ 定义的 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的 n 维球面. 利用由下式定义的映射将 M 嵌入到 P_{n+1} 中:

$$x^0=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+y^{n+1}),\quad x^1=y^1,\cdots,x^n=y^n,\quad x^{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-y^{n+1}).$$

M 在 P_{n+1} 中的象由下式给出:

$$(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2-2x^0x^{n+1}=0.$$

令 h 是由下式给出的 P_{n+1} 上的 Riemann 度量:

$$p^*h=2\frac{\left(\sum\limits_{i=0}^{n+1}(x^i)^2\right)\left(\sum\limits_{i=0}^{n+1}(dx^i)^2\right)-\left(\sum\limits_{i=0}^{n+1}x^idx^i\right)^2}{\left(\sum\limits_{i=0}^{n+1}(x^i)^2\right)^2},$$

其中 p 是从 $\boldsymbol{R}^{n+2}-\{0\}$ 到 P_{n+1} 上的自然射影. 那么嵌入 $M\to P_{n+1}$ 是等距映射. 令 G 是保持二次型 $(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2-2x^0x^{n+1}$ 不变的 $\boldsymbol{R}^{n+2}$ 的线性变换群. 那么 G 把 M 在 P_{n+1} 中的象映射为其自身. 容易验证, 看成作用在 M 上的变换群, G 是一个 $\frac{1}{2}(n+1)\cdot(n+2)$ 维的保形变换群.

因为下述理由, $n=2$ 的情况在关于保形变换的大多数问题中是个例外情况. 令 M 是带有局部坐标系 $z=x+iy$ 的复 1 维流形. 令 g 是 M 上的一个 Riemann 度量并且具有下列形式:

$$f(dx^2+dy^2)=fdzd\bar{z},$$

其中 f 是 M 上的正值函数. 那么 M 上的每个复解变换均为保形变换.

基本符号一览表

在这里我们只概括了那些在全书中最常用的基本符号.

1. $\sum_i, \sum_{i,j}, \cdots$ 等表示对 i 或对 $i, j, \cdots$ 求和, 指标的取值范围一般从上下文是清楚的.

2. $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 分别表示实数域和复数域.

   $\mathbf{R}^n$：n 元实数组 $(x^1, \cdots, x^n)$ 组成的向量空间

   $\mathbf{C}^n$：n 元复数组 $(z^1, \cdots, z^n)$ 构成的向量空间

   (x, y)：表示 $\mathbf{R}^n$ 中的内积 $\sum_i x^i y^i$(或 $\mathbf{C}^n$ 中的内积 $\sum_i x^i \bar{y}^i$)

   $GL(n; \mathbf{R})$：作用在 $\mathbf{R}^n$ 上的一般线性群

   $\mathfrak{gl}(n; \mathbf{R})$：$GL(n; \mathbf{R})$ 的 Lie 代数

   $GL(n; \mathbf{C})$：作用于 $\mathbf{C}^n$ 上的一般线性群

   $\mathfrak{gl}(n; \mathbf{C})$：$GL(n; \mathbf{C})$ 的 Lie 代数

   $O(n)$：正交群

   $\mathfrak{o}(n)$：$O(n)$ 的 Lie 代数

   $U(n)$：酉群

   $\mathfrak{u}(n)$：$U(n)$ 的 Lie 代数

   $\boldsymbol{T}_s^r(V)$：向量空间 V 上的 (r, s) 型张量空间

   $\boldsymbol{T}(V)$：V 上的张量代数

   A^n：看作仿射空间的空间 $\mathbf{R}^n$

   $A(n; \mathbf{R})$：A^n 的仿射变换群

   $\mathfrak{a}(n; \mathbf{R})$：$A(n; \mathbf{R})$ 的 Lie 代数

3. M 表示 n 维可微流形.

   $T_x(M)$：M 在 x 点的切空间

   $\mathfrak{F}(M)$：M 上的可微函数组成的代数

   $\mathfrak{X}(M)$：M 上的向量场构成的 Lie 代数

   $\mathfrak{T}(M)$：M 上的张量场构成的代数

   $\mathfrak{D}(M)$：M 上的微分形式构成的代数

   $T(M)$：M 上的切丛

   $L(M)$：M 的线性标架丛

   $O(M)$：M(关于给定 Riemann 度量) 的规范正交标架丛

   $\theta = (\theta^i)$：$L(M)$ 上或者 $O(M)$ 上的标准 1 形式

$A(M)$：M 的仿射标架丛

$T_s^r(M)$：M 上的 (r,s) 型张量丛

f_*：可微映射 f 的微分

$f^*\omega$：微分形式 ω 在映射 f 下的变换

$\dot{x}_t$：曲线 $x_t(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 在 x_t 点的切向量.

L_X：关于向量场 X 的 Lie 微分

4. 对于 Lie 群 G, 以 G° 表示其单位分支, 以 $\mathfrak{g}$ 表示其 Lie 代数

L_a：由 $a \in G$ 产生的左平移

R_a：由 $a \in G$ 产生的右平移

$\mathrm{ad}\, a$：由 a 产生的内自同构; 也表示 $\mathfrak{g}$ 中的伴随表示

$P(M,G)$：M 上以 G 为结构群的主纤维丛

A^*：对应于 $A \in \mathfrak{g}$ 的基本向量场

$\omega = (\omega_j^i)$：联络形式

$\Omega = (\Omega_j^i)$：曲率形式

$E(M,F,G,P)$：以 F 为纤维的 $P(M,G)$ 的相伴丛

5. 对于 M 上的仿射 (线性) 联络 Γ.

$\Theta = (\Theta_j^i)$：挠率形式

Γ_{jk}^i：Christoffel 符号

$\psi(x)$：$x \in M$ 点的线性和乐群

$\Phi(x)$：$x \in M$ 点的仿射和乐群

∇_X：关于向量 (场)X 的协变微分

R：曲率张量场 (以 R_{jkl}^i 为分量)

T：挠率张量场 (以 T_{jk}^i 为分量)

S：Ricci 张量场 (分量为 R_{ij})

$\mathfrak{A}(M)$：所有仿射变换构成的群

$\mathfrak{a}(M)$：所有无穷小仿射变换构成的 Lie 代数

$\mathfrak{I}(M)$：所有等距变换构成的群

$\mathfrak{i}(M)$：所有无穷小等距构成的 Lie 代数

参考文献

AMBROSE, W.

[1] Parallel translation of Riemannian curvature, Ann. of Math. 64 (1956), 337–363.

AMBROSE, W. and SINGER, I M.

[1] A theorem on holonomy, Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953), 428–443.

ARTIN, E.

[1] Geometric Algebra, Interscience Tracts #3. Interscience, New York, 1957.

ARENS, R.

[1] Topologies for homeomorphism groups, Ann. of Math. 68 (1946), 593–610.

AUSLANDER, L.

[1] Examples of locally affine spaces, Ann. of Math. 64 (1956), 255–259.

AUSLANDER, L. and KURANISHI, M.

[1] On the holonomy group of locally Euclidean spaces, Ann. of Math. 65 (1957), 411–415.

AUSLANDER, L. and MARKUS, L.

[1] Holonomy of flat affinely connected manifolds, Ann. of Math. 62 (1955), 139–151.

BERGER, M.

[1] Sur les groupes d'holonomie des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes, Bull. Soc. Math, France 83 (1955), 279–330.

BERNARD, D.

[1] Sur la géométrie différentielle des G-structures, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 10 (1960), 151–270.

BIEBERBACH, L.

[1] Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume I, Math. Ann. 70 (1911), 297–336; II. 72 (1912), 400–412.

[2] Über die Minkowskische Reduktion der positiven quadratischen Formen und die endliche Gruppen linearer ganzzahlige Substitutionen, Cöttingen Nachr. (1912), 207–216.

BIEBERBACH, L. and SCHUR, I.

[1] Über die Minkowskische Reduktiontheorie der positiven quadratischen Formen, Sitzungsberichte d. Preuss. Akad. Wiss. Berlin 33 (1928), 510–535.

BOCHNER, S.

[1] Vector fields and Ricci curvature, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 776–797.

BOCHNER, S. and MONTGOMERY, D.

[1] Locally compact groups of differentiable transformations, Ann. of Math. 47 (1946), 639–653.

[2] Groups on analytic manifolds, Ann. of Math. 48 (1947), 659–669.

BOREL, A. and LICHNEROWICZ, A.

[1] Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes, C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952), 1835–1837.

CALABI, E. and MARKUS, L.

[1] Relativistic space forms, Ann. of Math. 75 (1962), 63–76.

CARTAN, E.

[1] Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, Ann. Ec. Norm. Sup. 40 (1923), 325–412; 41 (1924), 1–25; 42 (1925), 17–88.

[2] Les espaces à connexion conforme, Ann. Soc. Pol. Math. 2 (1923), 171–221.

[3] Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl, J. Math. Pures Appl. 2 (1923), 167–192.

[4] Sur les variétés à connexion projective, Bull. Soc. Math. France, 52 (1924), 205–241.

[5] La Géométrie des Espaces de Riemann, Mémorial des Sciences Math., Vol. 9, 1925.

[6] Les groupes d'holonomie des espaces généralises, Acta Math. 48 (1926), 1–42.

[7] Sur une class remarquable d'espaces de Riemann, Bull. Soc. Math. France, 54 (1926), 214–264; 55 (1927), 114-134.

[8] Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann, Gauthiers-Villars, Paris, 1928; 2nd edition, 1946.

[9] La Méthode du Repère Mobile, la Théorie des Groupes Continus et les Espaces Généralisés, Actualités Sci. et Ind., #194, Hermann, Paris, 1935.

CARTAN, H.

[1] Sur les groupes de transformations analytiques, Actualités Sci. et Ind., #198, Hermann, Paris, 1935.

[2] Notion d'algèbre différentielle; applications aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie, Colloque de Topologie, Bruxelles (1950), 15–27.

[3] La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal, Colloque de Topologie, Bruxelles (1950), 57–71.

CHERN, S. S.

[1] Differential geometry of fiber bundles, Proc. Int. Congress (1950), Vol. II, 397–411.

[2] Topics in Differential Geometry, Inst. for Adv. Study, Princeton, 1951.

[3] Pseudo-groupes continus infinis, Colloque de Géométrie Différentielle, Strasbourg (1953), 119–136.

CHEVALLEY, C.

[1] Theory of Lie Groups, Princeton University Press, 1946.

CHRISTOFFEL, E. B.

[1] Über die Transformation der homogenen Differential-ausdrücke zweiten Grades, J. Reine Angew. Math. 70 (1869), 46–70.

VAN DANTZIG, D. and VAN DER WAERDEN, B. L.

[1] Über metrisch homogenen Räume, Abh. Math. Sem Hamburg 6 (1928), 374–376.

DIEUDONNÉ, J.

[1] Sur les espaces uniformes complets, Ann. Ec. Norm. Sup. 56 (1939), 277–291.

EHRESMANN, G.

[1] Sur la notion d'espace complet en géométrie différentielle, C. R. Acad. Sci. Paris 202 (1936), 2033.

[2] Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. Colloque de Topologie, Bruxelles (1950), 29–55.

EISENHART, L. P.

[1] Riemannian Geometry, 2nd edition, Princeton University Press, 1949.

FREUDENTHAL, H.

[1] Die Topologie der Lieschen Gruppen als algebraisches Phänomen I, Ann. of Math. 42 (1941), 1051–1074.

FROBENIUS, G.

[1] Über die unzerlegbaren diskreten Bewegungsgruppen, Sitzungs-berichte d. König. Preuss. Akad. Wiss. Berlin 29 (1911), 654–665.

FUJIMOTO, A.

[1] On the structure tensor of G-structure, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A, 18 (1960), 157–169.

GODEMENT, R.

[1] Théorie des Faisceaux: Actualités Sci. et Ind., #1252, Hermann, Paris, 1958.

GOLDBERG, S. I. and KOBAYASHI, S.

[1] The conformal transformation group of a compact Riemannian manifold, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 48 (1962), 25–26; Amer. J. Math. 84 (1962), 170–174.

[2] The conformal transformation group of a compact homogeneous Riemannian manifold, Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 378–381.

GOTO, M. and SASAKI, S.

[1] Some theorems on holonomy groups of Riemannian manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), 148–158.

HALL, M.

[1] The Theory of Groups, Macmillan, New York, 1959.

HANO, J.

[1] On affine transformations of a Riemannian manifold, Nagoya Math. J. 9 (1955), 99–109.

HANO, J. and MORIMOTO, A.

[1] Note on the group of affine transformations of an affinely connected manifold, Nagoya Math. J., 8 (1955), 71–81.

HANO, J. and OZEKI, H.

[1] On the holonomy groups of linear connections, Nagoya Math J. 10 (1956), 97–100.

HANTZSCHE, W. and WENDT, W.

[1] Drei dimensionale euklidische Raumformen, Math Ann., 110 (1934), 593–611.

HELGASON, S.

[1] Some remarks on the exponential mapping for an affine connection, Math. Scand. 9 (1961), 129–146.

HERMANN, R.

[1] On the differential geometry of foliations, Ann. of Math. 72 (1960), 445–457.

HICKS, N.

[1] A theorem on affine connexions, Illinois J. Math 3 (1959), 242–254.

HILBERT, D.

[1] Über das Dirichletsche Prinzip, J. Reine Angew. Math. 129 (1905), 63–67.

HOPF, H.

[1] Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, Math. Ann. 95 (1926), 313–339.

HOPF, H. and RINOW, W.

[1] Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Flächen. Comm. Math. Helv. 3 (1931), 209–225.

HU, S. T.

[1] Homotopy Theory, Academic Press, New York, 1959.

IWASAWA, K.

[1] On some types of topological groups, Ann. of Math. 50 (1949), 507–558.

KELLEY, J. L.

[1] General Topology, Van Nostrand, Princeton, 1955.

KILLING, W.

[1] Die nicht-euklidischen Raumformen in analytische Behandlung, Teubner, Leibzig, 1885.

[2] Über die Clifford-Kleinschen Raumformen, Math. Ann. 39 (1891), 257–278.

KLEIN, F.

[1] Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Math. Ann. 43 (1893), 63–100.

[2] Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie, Springer, Berlin, 1928.

KLINGENBERG, W.

[1] Eine Kennzeichnung der Riemannschen sowie der Hermitschen Mannigfaltigkeiten, Math. Z. 70 (1959), 300–309.

KOBAYASHI, S.

[1] Le groupe de transformations qui laissent invariant un parallélisme, Colloque de Topologie, Strasbourg (1954).

[2] Espaces à connexion de Cartan complète, Proc. Japan Acad. Sci. 30 (1954), 709–710.

[3] Espaces à connexions affines et riemanniennes symétriques, Nagoya Math. J. 9 (1955), 25–37.

[4] A theorem on the affine transformation group of a Riemannian manifold, Nagoya Math. J. 9 (1955), 39–41.

[5] Induced connections and imbedded Riemannian spaces, Nagoya Math. J. 10 (1956), 15–25.

[6] Theory of connections, Annali di Mat. 43 (1957), 119–194.

KOSTANT, B.

[1] Holonomy and the Lie algebra of infinitesimal motions of a Riemannian manifold, Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), 528–542.

KUIPER, N. H.

[1] Sur les surfaces localement affines, Colloque de Géométrie Différentielle, Strasbourg (1953), 79–88.

LEVI-CIVITA, T.

[1] Nozione di parallelismo in una varieta qualunque e consequente specificazione geometrica della curvature Riemanniana, Rend. Palermo 42 (1917), 73–205.

LEVI-CIVITA, T. and RICCI, G.

[1] Méthodes de calcul différentiel absolu et leur applications, Math. Ann. 54 (1901), 125–201.

LICHNEROWICZ, A.

[1] Espaces homogènes kählériens, Colloque de Géométrie Différentielle, Strasbourg (1953), 171–201.

[2] Théorie Globale des Connexions et des Groupes d'Holonomie, Ed. Cremonese, Rome, 1955.

[3] Géométrie des Groupes de Transformations, Dunod, Paris, 1958.

MATSUSHIMA, Y.

[1] On the discrete subgroups and homogeneous spaces of nilpotent Lie groups, Nagoya Math. J. 2 (1951), 95–110.

MILNOR, J.

[1] Groups which act on S^n without fixed points, Amer. J. Math. 79 (1957), 623–630.

MINKOWSKI, H.

[1] Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz, J. Reine Angew. Math. 129 (1905), 220–274.

MONTGOMERY, D. and ZIPPIN, L.

[1] Transformation Groups, Interscience Tracts #1, Interscience, New York, 1955.

MYERS, S. B. and STEENROD, N.

[1] The group of isometries of a Riemannian manifold, Ann. of Math. 40 (1939), 400-416.

NAGANO, T.

[1] The conformal transformation on a space with parallel Ricci tensor, J. Math. Soc. Japan 11 (1959), 10–14.

[2] On fibered Riemannian manifolds, Sci. Papers, College General Educ. Univ. of Tokyo 10 (1960), 17–27.

NAGANO, T. and YANO, K.

[1] Einstein spaces admitting a one-parameter group of conformal transformations, Ann. of Math. 69 (1959), 451–461.

NARASIMHAN, M. S. and RAMANAN, S.

[1] Existence of universal connections, Amer. J. Math. 83 (1961), 563–572.

NIJENHUIS, A.

[1] X_{n-1}-forming sets of eigenvectors, Indag. Math. 13 (1951), 200–212.

[2] On the holonomy group of linear connections, Indag. Math. 15 (1953), 233–249; 16 (1954), 17–25.

[3] A note on infinitesimal holonomy groups, Nagoya Math. J. 15 (1957), 145–146.

NOMIZU, K.

[1] On the group of affine transformations of an affinely connected manifold, Proc. Amer. Math. Soc., 4 (1953), 816–823.

[2] Invariant affine connections on homogeneous spaces, Amer. J. Math., 76 (1954), 33–65.

[3] Studies on Riemannian homogeneous spaces, Nagoya Math. J., 9 (1955), 43–56.

[4] Reduction theorem for connections and its application to the problem of isotropy and holonomy groups of a Riemannian manifold, Nagoya Math. J. 9 (1955), 57–66.

[5] Un théorème sur les groupes d'holonomie, Nagoya Math. J. 10 (1956), 101–103.

[6] On infinitesimal holonomy and isotropy groups, Nagoya Math. J. 11 (1957), 111–114.

[7] Lie Groups and Differential Geometry, Publ. Math. Soc. Japan, #2, 1956.

[8] On local and global existence of Killing vector fields, Ann. of Math. 72 (1960), 105–120.

[9] Sur les algèbres de Lie de générateurs de Killing et l'homogénéité d'une variété riemannienne, Osaka Math. J. 14 (1962), 45–51.

NOMIZU, K. and OZEKI, H.

[1] The existence of complete Riemannian metrics, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 889–891.

[2] On the degree of differentiability of curves used in the definition of the holonomy group, Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 74–75.

[3] A theorem on curvature tensor fields, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 48 (1962), 206–207.

NOWACKI, W.

[1] Die euklidischen, dreidimensionalen gescholssenen und offenen Raumformen, Comm. Math. Helv. 7 (1934), 81–93.

OZEKI, H.

[1] Infinitesimal holonomy groups of bundle connections, Nagoya Math. J. 10 (1956), 105–123.

PALAIS, R. S.

[1] A Global Formulation of the Lie Theory of Transformation Groups. Mem. Amer. Math. Soc., #22, 1957.

[2] On the differentiability of isometries, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 805–807.

PONTRJAGIN, L.

[1] Topological Groups, Princeton University Press, 1956.

REINHART, B.

[1] Foliated manifolds with bundle-like metrics, Ann. of Math. 69 (1959), 119–132.

DE RHAM, G.

[1] Sur la réductibilité d'un espace de Riemann, Comm. Math. Helv. 26 (1952), 328–344.

RIEMANN, B.

[1] Über die Hypothesen, welche de Geometrie zugrunde liegen, Ges. Werke.

SAITO, M.

[1] Sur certains groupes de Lie résolubles I, Sci. Papers College General Educ. Univ. of Tokyo 7 (1957), 1–11; II, *ibid.*, 157–168.

SCHOUTEN, J. A. and STRUIK, D. J.

[1] On some properties of general manifolds relating to Einstein's theory of gravitation, Amer. J. Math. 43 (1921), 213–216.

SCHUR, F.

[1] Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungsmasses mit den projektiven Räumen, Math Ann. 27 (1886), 537–567.

SEIFERT, H. and THRELFALL, W.

[1] Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Räumes, Math. Ann. 104 (1930), 1–70; 107 (1933), 543–586.

SIBUYA, Y.

[1] Note on real matrices and linear dynamical systems with periodic coefficients, J. Math. Anal. Appl. 1 (1960), 363–372.

SIEGEL, C. L.

[1] Einheiten quadratische Formen, Abh. Math. Sem. Hamburg 13 (1940), 209–239.

SIERPINSKI, W.

[1] Sur les espaces métriques localement separables, Fund. Math. 21 (1933), 107–113.

SIMONS, J.

[1] On transitivity of holonomy systems, Ann. of Math. 76 (1962), 213–234.

SMITH, J. W.

[1] Lorentz structures on the plane, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 226-237.

STEENROD, N.

[1] The Topology of Fibre Bundles, Princeton University Press, 1951.

TAKIZAWA, N.

[1] On Cartan connexions and their torsions, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, ser A, 29 (1955), 199–217.

TANAKA, N.

[1] Conformal connections and conformal transformations, Trans. Amer. Math. Soc. 92 (1959), 168–190.

VINCENT, G.

[1] Les groupes linéaires finis sans points fixes, Comm. Math. Helv. 20 (1947), 117–171.

WALKER, A. G.

[1] On Ruse's spaces of recurrent curvature, Proc. London Math. Soc. (2) 52 (1950), 36–64.

[2] The fibring of Riemannian manifolds, Proc. London Math. Soc. (3) 3 (1953), 1–19.

[3] Connexions for parallel distribution in the large, Quart. J. Math. (Oxford) (2) 6 (1955), 301–308; II, 9 (1958), 221–231.

WANG, H. C.

[1] On invariant connections over a principal fibre bundle. Nagoya Math. J. 13 (1958), 1–19.

WEIL, A.

[1] Sur les théorèmes de de Rham, Comm. Math. Helv. 26 (1952), 119–145.

WEYL, H.

[1] Reine infinitesimalgeometrie, Math. Z. 2 (1918), 384–411.

[2] Zur Infinitesimalgeometrie; Einordnung der projektiven und konformen Auffassung, Göttingen Nachrichten (1921), 99–112.

[3] Raum, Zeit, Materie, Springer, Berlin, 1918.

WHITEHEAD, J. H. C.

[1] Convex regions in the geometry of paths, Quart. J. Math. 3 (1932), 33–42.

WILLMORE, T. J.

[1] Parallel distributions on manifolds, Proc. London Math. Soc. (3) 6 (1956), 191–204.

[2] Connexions for systems of parallel distributions, Quart. J. Math. (2) 7 (1956), 269–276.

WOLF, J. A.

[1] Surla classification des variétés riemanniennes homogènes à courbure constante, C. R. Acad. Sci. Paris 250 (1960), 3443–3445.

[2] The manifolds covered by a Riemannian homogeneous manifold, Amer. J. Math 82 (1960), 661–688.

[3] Homogeneous manifolds of constant curvature, Comm. Math. Helv. 36 (1961), 112–147.

[4] The Clifford-Klein space forms of indefinite metric, Ann. of Math. 75 (1962), 77–80.

[5] Vincent's conjecture of Clifford translations of the sphere, Comm. Math. Helv. 36 (1961), 33–41.

[6] Discrete groups, symmetric spaces, and global holonomy, Amer. J. Math. 84 (1962), 527–542.

WONG, Y. C.

[1] Recurrent tensors on a linearly connected differentiable manifold, Trans. Amer. Math. Soc. 99 (1961), 325–341.

YANO, K.

[1] On harmonic and Killing vectors, Ann. of Math. 55 (1952), 38–45.

[2] The Theory of Lie Derivatives and Its Applications, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1957.

YAMABE, H.

[1] On an arcwise connected subgroup of a Lie group, Osaka Math. J. 2 (1950), 13–14.

YOSIDA, K.

[1] A theorem concerning the semi-simple Lie groups, Tohoku Math. J., 43 (Part II) (1937), 81–84.

ZASSENHAUS, H.

[1] Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen, Abh. Math. Sem. Hamburg. 12 (1938), 289–312.

[2] Über endliche Fastkörper, Abh. Math. Sem. Hamburg 11 (1936), 187–220.

索　　引

(中文索引以汉语拼音为序. 为简化记号以罗马数字标注章序号, 以阿拉伯数字标注节序号, 例如以 II. 3 表示第二章第 3 节.)

数 学 名 著 译 丛

拓扑空间论

代数特征值问题

数学概观

常微分方程

数学与猜想

代数几何

数学——它的内容，方法和意义

非线性与泛函分析

微积分和数学分析引论

代数数理论讲义

非线性及泛函分析——数学分析中的非线性问题讲义

数学的发现——对解题的理解、研究和讲授

代数拓扑基础

博大精深的素数

环与模范畴

代数几何引论

代数学 I

代数学 II

控制论（或关于在动物和机器中控制和通信的科学）（第二版）

微分几何基础（第一卷）



ISBN 978-7-03-026473-2

9 787030 264732 >

定 价：56.00 元